極限概念を用いない導関数の定義

―― 代数的に定義した導関数 ――

「アルキメデスの蘊奥を究めた者にとっては，近世の数学者たちの成功を驚くまい」
（ライプニッツ）

坂本（さかもと）　茂（しげる）

【1】 接線についての考察

数学IIにおいては，接線の傾きの関数としての導関数 *derivative* が微分法 *differentiation*（極限 *limit*）を使わずに定義できることが分かる．数学Iでは，放物線や円が直線と共有点1つを持つとき接するといい，この直線を接線といっている．

2次関数 $f(x)=ax^2+bx+c$ とするとき，放物線 $y=f(x)$ 上の点 $P(t,\ f(t))$ を通る直線 $y-f(t)=m(x-t)$ とする．放物線と直線との共有点の x 座標は y を消去して2次方程式

$$f(x)-f(t)=m(x-t)$$

すなわち $(x-t)\{a(x+t)+b-m\}=0$ の解である．共有点が1つのとき直線は接し，接線となる．このとき2次方程式は重解 $x=t$ を持つ．したがって，方程式の第2因数も $x=t$ で0となり，傾きは $m=2at+b$ である．なお，2次方程式を

$$ax^2+(b-m)x-t(at+b-m)=0$$

になおすと，判別式 D は0となっている．

$$D=(b-m)^2+4at(at+b-m)$$
$$=(2at+b-m)^2=0$$

点 P での接線は $y=(2at+b)x-at^2+c$ となる．接線の傾き m は t の関数 $Q(t)=2at+b$ で，これを $f(x)$ の導関数と呼べばよいのである．

【2】 整関数の接線の定義

x の整式 $f(x)$ とするとき，$y=f(x)$ とある直線との共有点を求める式で，重解になる点 P を通る直線を $y=f(x)$ の接点 P における接線と定義する．

曲線上の点 $P(t,\ f(t))$ を通る直線は $y-f(t)=m(x-t)$ と書ける．x の方程式

$$f(x)-f(t)-m(x-t)=0$$

は解 $x=t$ を持つから，因数定理により $f(x)-f(t)$ はかならず $x-t$ で割り切れる．したがって

$$f(x)-f(t)=Q(x)(x-t)$$

で表される $f(x)$ よりも次数が1つ低い整式 $Q(x)$ が存在する．よって，x の方程式は $(x-t)\{Q(x)-m\}=0$ となる．点 P を通る直線が接線ならば重解 $x=t$ を持つから，接線の傾きは $m=Q(t)$ であり，接線の方程式は $y-f(t)=Q(t)(x-t)$ となる．

【3】 接線の傾きの性質と公式

$f(x)-f(t)=Q(x)(x-t)$,
$f_1(x)-f_1(t)=Q_1(x)(x-t)$,
$f_2(x)-f_2(t)=Q_2(x)(x-t)$ とするとき

(1) $f(x)=kf_1(x)$，（k 定数）ならば　$Q(t)=kQ_1(t)$

(2) $f(x)=f_1(x)+f_2(x)$ ならば $Q(t)=Q_1(t)+Q_2(t)$

(3) $f(x)=x^n$ $(n>1)$ のとき　$Q(t)=nt^{n-1}$

《証明》 (1) $f(x)-f(t)=kf_1(x)-kf_1(t)$
$=k\{f_1(x)-f_1(t)\}=kQ_1(x)(x-t)$
したがって，$Q(t)=kQ_1(t)$ である．

(2) $f(x)-f(t)=f_1(x)+f_2(x)-\{f_1(t)+f_2(t)\}$
$=f_1(x)-f_1(t)+f_2(x)-f_2(t)$
$=Q_1(x)(x-t)+Q_2(x)(x-t)$
$=\{Q_1(x)+Q_2(x)\}(x-t)$
したがって，$Q(t)=Q_1(t)+Q_2(t)$ である．

(3) $f(x)-f(t)=x^n-t^n$
$=(x-t)(x^{n-1}+x^{n-2}t+x^{n-3}t^2+\cdots\cdots+t^{n-1})$
よって　$Q(x)=x^{n-1}+x^{n-2}t+x^{n-3}t^2+\cdots\cdots+t^{n-1}$
したがって $Q(t)=nt^{n-1}$ である．

ここで $t=x$ とおくと $Q(x)=nx^{n-1}$ であるから異なったものになることに注意しておく．

【4】 導関数の定義と公式

ここで $Q(x)$ は t に関係するので正しくは $Q(x)=Q(t,\ x)$ とすべきものである．そのうえで $Q(t)=Q(t,\ t)=f'(t)$ を $f(x)$ の導関数と定義する．
$Q(x,\ x)=f'(x)$ であるが $Q(x)\fallingdotseq f'(x)$ である．
$Q_1(t)=f_1'(t)$，$Q_2(t)=f_2'(t)$ のとき
$Q_1(t)=Q_2(t)$ ならば $f_1'(x)=f_2'(x)$ だから次の式が成り立つ．

(1) $f(x)=kf_1(x)$ のとき　$f'(x)=kf_1'(x)$

(2) $f(x)=f_1(x)+f_2(x)$ のとき $f'(x)=f_1'(x)+f_2'(x)$

(3) $f(x)=x^n$ $(n>1)$ のとき　$f'(x)=nx^{n-1}$

定数 c とするとき

(4) $g'(x)=f'(x)$ の必要十分条件は　$g(x)=f(x)+c$

《証明》 $g(x)=f(x)+c$,
$f(x)-f(t)=Q(t,\ x)(x-t)$ とすると
$g(x)-g(t)=f(x)-f(t)=Q(t,\ x)(x-t)$ であり，

$$Q(x,\ x)=g'(x)=f'(x)$$

また $g'(x)=f'(x)$ とすると，これに等しい $Q(x,\ x)$ があって

$$g(x)-g(t)=Q(t,\ x)(x-t)$$
$$f(x)-f(t)=Q(t,\ x)(x-t)$$

である．

したがって　$g(x)-f(x)=g(t)-f(t)=c$（定数）

この証明で $(c)'=0$ を使わなかったのは，直線の接線に触れなかったからである．1次関数 $f(x)=ax+b$ において方程式

$$f(x)-f(t)=m(x-t)$$

も1次関数で重解を持たない．しかし，
$Q(t,\ x)=m=a$ であるから，このときも
$f'(x)=Q(x,\ x)=a$ とする．したがって $y=f(x)$ の接線は自身である．$n\geqq 0$ の整数で $(x^n)'=nx^{n-1}$ が成り立つ．

これで全ての整関数の導関数が得られる．たとえば

$$(2x^4+5x^3-7x^2+3x-6)'=8x^3+15x^2-14x+3$$

整関数と1次関数の連立方程式における重解ということを使って導関数を定義してきたので，x を複素数とする複素整関数の導関数と考えてもかまわない．

$f(x)=a_0x^n+a_1x^{n-1}+a_2x^{n-2}+\cdots+a_{n-1}x+a_n$ で $y=f(x)$ 上の点 $P(t,\ f(t))$ を通る直線 $y-f(t)=m(x-t)$ と $y=f(x)$ との共有点は $f(x)-f(t)=m(x-t)$ で与えられ点 P で重解 $x=t$ をもつ．$x-t=u$ とおくと
$f(u+t)-f(t)=mu$ は $u=0$ が重解である．

$$a_0(u+t)^n+a_1(u+t)^{n-1}+\cdots\cdots$$
$$+a_{n-1}(u+t)+a_n-f(t)=mu$$

において，定数項，1次の項が0でなければならず

$$m=na_0t^{n-1}+(n-1)a_1t^{n-2}+\cdots\cdots+a_{n-1}$$

となる．ゆえに $f(x)$ の導関数は

$$f'(x)=na_0x^{n-1}+(n-1)a_1x^{n-2}+\cdots\cdots+a_{n-1}$$

である．$f(x)=0$ が重解 $x=t$ をもつ条件は $f(t)=f'(t)=0$ となる

【5】 整関数以外の導関数の例

(1) $f(x)=\dfrac{1}{x}$ のとき $P\left(t,\ \dfrac{1}{t}\right)$ を通る直線

$y-\dfrac{1}{t}=m(x-t)$ は点 P では $(x-t)\left(m+\dfrac{1}{tx}\right)=0$

が重解を持つことから $m=-\dfrac{1}{t^2}$ である．

したがって $f'(x)=-\dfrac{1}{x^2}$ である．

(2) $f(x)=\sqrt{x}$ のとき $P(t,\ \sqrt{t}\,)$ を通る直線

$y-\sqrt{t}=m(x-t)$ は点 P において

$(x-t)\left\{m-\dfrac{1}{\sqrt{x}+\sqrt{t}}\right\}=0$ が重解 $x=t$ を持ち

$m=\dfrac{1}{2\sqrt{t}}$ だから　$f'(x)=\dfrac{1}{2\sqrt{x}}$

(3) 円 $x^2+y^2=r^2$ 上の点 $P(a,\ b)$ を通る直線を $y-b=m(x-a)$ とすると点 P では
$\{b+m(x-a)\}^2+x^2=a^2+b^2$ すなわち

$$(x-a)\{m^2(x-a)+x+a+2mb\}=0$$

は重解 $x=a$ を持ち $2a+2mb=0$ より

$m=-\dfrac{a}{b}$ となる．したがって $f(x)=\pm\sqrt{r^2-x^2}$

とするとき $f'(x)=-\dfrac{x}{y}$ である．

【6】 負の指数と分数指数の導関数

$f(x)=\dfrac{1}{x^n}$ 上の点 $P\left(a,\ \dfrac{1}{a^n}\right)$ における接線と $y=f(x)$ との共有点の x 座標は方程式

$\dfrac{1}{x^n}-\dfrac{1}{a^n}=Q(a,\ x)(x-a)$ の解で $x=a$ において重解を持つ．

$Q(a,\ x)=-\dfrac{x^{n-1}+ax^{n-2}+\cdots\cdots+a^{n-1}}{x^n a^n}$ であるから

$f'(x)=Q(x,\ x)=-\dfrac{nx^{n-1}}{x^{2n}}=-\dfrac{n}{x^{n+1}}=-nx^{-n-1}$

である．

$f(x)=x^{\frac{m}{n}}$ 上の点 $P(a,\ f(a))$ における接線と $y=f(x)$ との共有点の x 座標は方程式

$x^{\frac{m}{n}}-a^{\frac{m}{n}}=Q(a,\ x)(x-a)$ の解で $x=a$ で重解を持つ．

$$x^{\frac{m}{n}}-a^{\frac{m}{n}}=(x^{\frac{1}{n}}-a^{\frac{1}{n}})(x^{\frac{m-1}{n}}+x^{\frac{m-2}{n}}a^{\frac{1}{n}}+\cdots\cdots+a^{\frac{m-1}{n}})$$

$$x-a=(x^{\frac{1}{n}}-a^{\frac{1}{n}})(x^{\frac{n-1}{n}}+x^{\frac{n-2}{n}}a^{\frac{1}{n}}+\cdots\cdots+a^{\frac{n-1}{n}})$$

$$Q(a,\ a)=\frac{ma^{\frac{m-1}{n}}}{na^{\frac{n-1}{n}}}=\frac{m}{n}a^{\frac{m-n}{n}}$$

したがって　$f'(x)=\dfrac{m}{n}x^{\frac{m}{n}-1}$

$f(x)=x^{-\frac{m}{n}}$ とするときは

$x^{-\frac{m}{n}}-a^{-\frac{m}{n}}=-(x^{\frac{m}{n}}-a^{\frac{m}{n}})(ax)^{-\frac{m}{n}}$ と変形されるので

$f'(x)=-\dfrac{m}{n}x^{\frac{m}{n}-1}(x^2)^{-\frac{m}{n}}=-\dfrac{m}{n}x^{-\frac{m}{n}-1}$ である．

p が有理数のとき $f(x)=x^p$ の導関数が $f'(x)=px^{p-1}$ であることがいえる．

【7】 積と商の導関数

$$f(x)-f(a)=Q_1(a,\ x)(x-a),$$
$$g(x)-g(a)=Q_2(a,\ x)(x-a),$$
$$f(x)g(x)-f(a)g(a)=Q(a,\ x)(x-a)$$

とすると

$$\begin{aligned}
&f(x)g(x)-f(a)g(a)\\
&=f(x)g(x)-f(a)g(x)+f(a)g(x)-f(a)g(a)\\
&=Q_1(a,\ x)(x-a)g(x)+f(a)Q_2(a,\ x)(x-a)\\
&=\{Q_1(a,\ x)g(x)+f(a)Q_2(a,\ x)\}(x-a)
\end{aligned}$$

よって　$Q(a,\ x)=Q_1(a,\ x)g(x)+f(a)Q_2(a,\ x)$

$Q_1(x,\ x)$, $Q_2(x,\ x)$, $Q(x,\ x)$ が $f(x)$, $g(x)$, $f(x)g(x)$ の導関数であるから

$$\{f(x)g(x)\}'=f'(x)g(x)+f(x)g'(x)$$

である．また

$$\frac{1}{g(x)}-\frac{1}{g(a)}=-\frac{Q_2(a,\ x)}{g(a)g(x)}(x-a)$$

となって $\left\{\dfrac{1}{g(x)}\right\}'=-\dfrac{g'(x)}{\{g(x)\}^2}$ である．

このことより

$$\left\{\frac{f(x)}{g(x)}\right\}'=\frac{f'(x)g(x)-f(x)g'(x)}{\{g(x)\}^2}$$

【8】 合成関数と逆関数の導関数

$y=f(u)$, $u=g(x)$ とする合成関数 $y=f(g(x))$ においては $b=g(a)$ とおき $f'(x)=Q_1(x,\ x)$, $g'(x)=Q_2(x,\ x)$ として

$$\begin{aligned}
&f(g(x))-f(g(a))=f(u)-f(b)=Q_1(b,\ u)(u-b)\\
&=Q_1(b,\ u)\{g(x)-g(a)\}=Q_1(b,\ u)Q_2(a,\ x)(x-a)\\
&=Q_1(g(a),\ g(x))Q_2(a,\ x)(x-a)
\end{aligned}$$

となる．したがって合成関数の導関数は次のようになる．

$$\begin{aligned}
\{f(g(x))\}'&=Q_1(g(x),\ g(x))Q_2(x,\ x)\\
&=f'(g(x))g'(x)
\end{aligned}$$

たとえば　$\{x^{-\frac{m}{n}}\}'=\{(x^{\frac{m}{n}})^{-1}\}'=-(x^{\frac{m}{n}})^{-2}\dfrac{m}{n}x^{\frac{m}{n}-1}$

$$=-\frac{m}{n}x^{-\frac{m}{n}-1}$$

逆関数 $y=f^{-1}(x)$ については $f(f^{-1}(x))=x$ であるから合成関数の導関数により

$$f'(f^{-1}(x))\{f^{-1}(x)\}'=1$$

したがって，$\{f^{-1}(x)\}'=\dfrac{1}{f'(f^{-1}(x))}$ である．

たとえば $(\sqrt{x})'=\dfrac{1}{2(\sqrt{x})}$ である．

【9】 整関数の展開

x の整式 $f(x)$ は次々

$$f(x)=f(\alpha)+Q_1(x)(x-\alpha)$$
$$Q_1(x)=Q_1(\alpha)+Q_2(x)(x-\alpha)$$
$$Q_2(x)=Q_2(\alpha)+Q_3(x)(x-\alpha)$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

とできる．ここで $Q_{k+1}(\alpha)=Q_k{}'(\alpha)$ であるが $Q_{k+1}(x)\neq Q_k{}'(x)$ である．このことから $f(x)$ は次のように展開できる．

$$\begin{aligned}
f(x)=&f(\alpha)+Q_1(\alpha)(x-\alpha)\\
&+Q_2(\alpha)(x-\alpha)^2+\cdots\cdots+Q_n(\alpha)(x-\alpha)^n
\end{aligned}$$

いま $f(x)=a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots\cdots+a_nx^n$ とすると $f(x)$ の k 回導関数 $f^{(k)}(x)$ は

$$\begin{aligned}
f^{(k)}(x)&=k\cdots2\cdot1a_k+(k+1)\cdots3\cdot2a_{k+1}x+\cdots\cdots\\
&\qquad+n\cdots(n-k+1)a_nx^{n-k}\\
&=\sum_{r=k}^{n}\frac{r!\,a_r}{(r-k)!}x^{r-k}=k!\sum_{r=k}^{n}a_r\,{}_r\mathrm{C}_kx^{r-k}
\end{aligned}$$

である．$f(x+t)$ を展開すると

$$\begin{aligned}
f(x+t)&=\sum_{r=0}^{n}a_r(x+t)^r=\sum_{r=0}^{n}a_r\sum_{k=0}^{r}{}_r\mathrm{C}_kx^{r-k}t^k\\
&=\sum_{k=0}^{n}t^k\sum_{r=k}^{n}a_r\,{}_r\mathrm{C}_kx^{r-k}=\sum_{k=0}^{n}\frac{f^{(k)}(x)}{k!}t^k
\end{aligned}$$

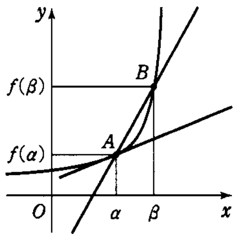
ここで $x=\alpha$ とし $\alpha+t$ を x でおきなおせば

$$f(x)=\sum_{k=0}^{n}\frac{f^{(k)}(\alpha)}{k!}(x-\alpha)^k$$

となる．したがって $f^{(k)}(\alpha)=k!\,Q_k(\alpha)$ である．

【10】 一般の接線と整関数の接線

一般の曲線 $y=f(x)$ の接線は極限によって定義される．たとえば，曲線上の2点 $A(\alpha,\ f(\alpha))$, $B(\beta,\ f(\beta))$ があって $B\to A$ としたときに直線 AB の極限の直線で点 A における接線を定義する．この曲線と直線 AB の交点は方程式



$$f(x)-f(\alpha)=\frac{f(\beta)-f(\alpha)}{\beta-\alpha}(x-\alpha)$$

の解で与えられる．$f(x)$ が整関数とすれば $f(x)-f(\alpha)$ は因数定理により因数 $x-\alpha$ を持ち，$f(x)-f(\alpha)=(x-\alpha)Q(x)$ となる次数が1低い整関数 $Q(x)$ が存在する．$x=\beta$ として傾き $Q(\beta)$ が得られ直線 AB は

$$y-f(\alpha)=Q(\beta)(x-\alpha)$$

となる．そして $\beta\to\alpha$ としたときの極限

$$y-f(\alpha)=Q(\alpha)(x-\alpha)$$

が点 A における曲線 $y=f(x)$ の接線である．

この接線と曲線との共有点を求めると，方程式は

$$(x-\alpha)\{Q(x)-Q(\alpha)\}=0$$

となるから，$x=\alpha$ で重解を持つことが分かる．これが最初に整関数の接線の定義にしたものなのである．重解 *equal root* は代数方程式でいわれるもので，したがって一般の関数ではこのような接線の定義は難しい．

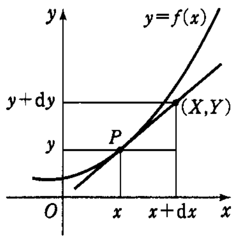
【11】 微分 $\mathrm{d}x$，$\mathrm{d}y$ の定義と原始関数

曲線 $y=f(x)$ 上の点 $A(a,\ f(a))$ における接線の傾きは $x=a$ で重解を持つ方程式

$$f(x)-f(a)=Q(a,\ x)(x-a)$$

で $Q(a,\ a)$ であった．

a を変数としたとき $f'(x)=Q(x,\ x)$ が導関数である．曲線 $y=f(x)$ 上の点 $P(x,\ y)$ における接線上の点を $(X,\ Y)$ とすると $Y-y=f'(x)(X-x)$ が成り立つ．ここで，



$$\mathrm{d}x=X-x,\ \mathrm{d}y=Y-y$$

と決め $\mathrm{d}x$ を x の微分 *differential* といい，y の微分 $\mathrm{d}y$ は $\mathrm{d}x$ により $\mathrm{d}y=f'(x)\mathrm{d}x$ から決まるものである．

合成関数，逆関数については

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}u}\cdot\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x},\quad \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=1\Big/\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y}$$

が成り立つ．これは分数と考えてよいからである．

$y=F(x)$ で $y'=f(x)$ のとき

$\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}F(x)=f(x)$ である．ここで関数 $y=F(x)$ を $f(x)$ の原始関数 (*primitive function*) という．$\mathrm{d}y=f(x)\mathrm{d}x$ は幅 $\mathrm{d}x$ 高さ $f(x)$ の矩形の面積である．

$$y=\mathrm{d}^{-1}f(x)\mathrm{d}x$$

で表すことにする．$F(x)=\mathrm{d}^{-1}f(x)\mathrm{d}x$ であり $G'(x)=F'(x)=f(x)$ とすると $G(x)=F(x)+c$ だから $G(x)$ は

$$\mathrm{d}^{-1}f(x)\mathrm{d}x=F(x)+c\quad (c\ は定数)$$

となる．定数 k, l とし導関数において

$$\{kF(x)+lG(x)\}'=kF'(x)+lG'(x)$$

が成り立つから $F'(x)=f(x)$, $G'(x)=g(x)$ とすれば

$$\mathrm{d}^{-1}\{kf(x)+lg(x)\}\mathrm{d}x=k\mathrm{d}^{-1}f(x)\mathrm{d}x+l\mathrm{d}^{-1}g(x)\mathrm{d}x$$

となる．また $\{(x)^{p+1}\}'=(p+1)x^p$ より

$p\neq-1$ のとき $\mathrm{d}^{-1}x^p\mathrm{d}x=\dfrac{1}{p+1}x^{p+1}+c$ (c は定数)

以後 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\mathrm{d}y(\mathrm{d}x)^{-1}$ などの混乱を避け d^{-1} は $\int$ を使って表すものとする．

【12】 原始関数の図形的意味

接線については図形からさらに次のことが分かる．

(平均値の定理) 点 $A(a,\ F(a))$, $B(b,\ F(b))$ とするとき，直線 AB と接点 $C(c,\ F(c))$ での接線の傾きが一致するような c が $a\leqq c\leqq b$ で存在する．すなわち

$$\frac{F(b)-F(a)}{b-a}=F'(c)\quad (a\leqq c\leqq b)$$

これより $f(x)$ の原始関数の意味が説明できる．$F'(x)=f(x)$ とする．区間 $a\leqq x\leqq b$ を n 分割し $a=a_0<a_1<a_2<\cdots\cdots<a_n=b$ とすると

$$F(a_k)-F(a_{k-1})=(a_k-a_{k-1})f(c_k)$$
$$(a_{k-1} \leqq c_k \leqq a_k)$$

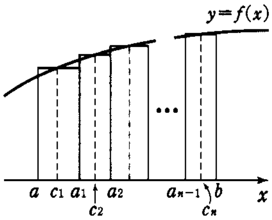
となる $c_k\ (k=1,\ 2,\ \cdots,\ n)$ が各区間で平均値の定理より存在する．これを加えると

$$F(a_n)-F(a_0)=(a_1-a_0)f(c_1)+(a_2-a_1)f(c_2)+\cdots$$
$$+(a_n-a_{n-1})f(c_n)$$

すなわち

$$\sum_{k=1}^{n} f(c_k)(a_k-a_{k-1})=F(b)-F(a)$$

どのような分割でも成り立つことから $y=f(x)$ と x 軸，$x=a,\ b$ で囲まれる部分の面積 S に等しいと考えられ



$$S=F(b)-F(a)$$

である．n は任意だから分割を細かくし，それが確信される．

平均値の定理は最大最小の定理から極限を介さず示される．まず，次の Rolle の定理を示す．

(Rolle の定理) $\varphi(a)=\varphi(b)$ なら $\varphi'(c)=0$ となる c が $a<c<b$ で存在する．

《証明》 $\varphi(x)$が定数関数なら明らかで，そうでなければ最大，最小値の一方は $\varphi(a)=\varphi(b)$ とは異なる．これを $\varphi(c)$ とすると $a<c<b$ である．

$\varphi(x)-\varphi(c)=Q(x,\ c)(x-c)$ となる多項式 $Q(x,\ c)$ が存在する．$\varphi(c)$ が最大値 (最小値でも同様) とすれば c は $\varphi(x) \leqq \varphi(c)$ だから

$x>c$ では　$Q(x,\ c) \leqq 0$

よって　$\varphi'(c)=Q(c,\ c) \leqq 0$

$x<c$ では　$Q(x,\ c) \geqq 0$

よって　$\varphi'(c)=Q(c,\ c) \geqq 0$

したがって $\varphi'(c)=0$ である．

ここで上記平均値の定理の証明は

$$\varphi(x)=F(x)-\left\{\frac{F(b)-F(a)}{b-a}(x-a)+F(a)\right\}$$

とおいて適用することで得られる．

重解により接線および導関数を定義し，面積は原始関数により $F(b)-F(a)$ で定義すれば多項式の場合は極限を介さずに解決する．しかし一般の関数では導関数，接線，面積は極限により定義される．また最大最小の定理は連続性に基礎をおいていて，極限が介在している．

【13】 代数的定義の導関数

高木貞治先生は「代数学講義」第 2 章で多項式の導関数を二項定理の考察から作っている．そして多項式の導関数は微分によらず導き出せることを書いている．またラグランジュは「解析関数論」で，極限，無限小といった把握しにくい概念を用いないで代数的に微分係数が求められることを強調している．しかし彼はテイラー展開を基本としていて一般の関数では極限概念から解放されたとはいえない．

たとえば $y=\sin x$ 上の点 $A(a,\ b)$ を通る直線を $y-b=m(x-a)$ とする．方程式 $\sin x-\sin a=m(x-a)$ を考察するのであるが，級数展開を認めて

$$\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n+1}-a^{2n+1}}{(2n+1)!}=m(x-a)$$

として方程式の重解を考える．$x-a=h$ で割れて

$$Q(x,\ a)=m=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)!}\sum_{r=0}^{2n}\binom{2n+1}{r}h^{2n-r}a^r$$

を得る．ここで $x=a$ が重解で $h=0$ とおき

$$f'(a)=Q(a,\ a)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)!}(2n+1)a^{2n}$$
$$=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n)!}a^{2n}=\cos a$$

すなわち級数展開を認めれば $(\sin x)'=\cos x$ であることが代数的に示される．

多項式に対し微分演算子 D を

$$D(f+g)=D(f)+D(g),\ D(fg)=D(f)g+fD(g)$$

で定義すると自然数 $n,\ k$ に対して容易に

$$D(f^n)=nf^{n-1}D(f),\ D(kf)=kD(f),\ D(k)=0$$

が導かれる．また $D(c)=0$ である c の集合は実数であることが分かり k は実数で成り立つ．さらに

$D\left(\dfrac{g}{g}\right)=D(g)\dfrac{1}{g}+gD\left(\dfrac{1}{g}\right)$，$D(1)=0$ より，

$D\left(\dfrac{1}{g}\right)=-\dfrac{D(g)}{g^2}$ であるから

$D\left(\dfrac{f}{g}\right)=\dfrac{D(f)g-fD(g)}{g^2}$ も得られる．

【14】 重解について

重解が考えられなければ導関数が定義されなかった．たとえば $f(x)=x^{\frac{k}{n}}$ の導関数は

$y^n=x^k\ (n,\ k \geqq 0)$ と $y-a^{\frac{k}{n}}=m(x-a)$ との共通の零点が $x=a$ であり，連立方程式が $x=a$ で重解をもつことの意味が存在する．y を消去して x の

多項式となるからである．しかし $y=\sin x$ の場合は $\sin x-\sin a=m(x-a)$ で重解の意味が定義されない．

代数方程式 $f(x)=a_0x^n+a_1x^{n-1}+\cdots\cdots+a_n=0$ が $x=\alpha$ を重解にもつことは $f(x)=Q(x)(x-\alpha)^2$ と書ける．$x-\alpha=t$ とすると $Q(x)=Q(t+\alpha)=b_0t^{n-2}+b_1t^{n-3}+\cdots\cdots+b_{n-2}$として $f(t+\alpha)=Q(t+\alpha)t^2$ より

$$a_0(t+\alpha)^n+a_1(t+\alpha)^{n-1}+\cdots\cdots+a_n$$
$$=b_0t^n+b_1t^{n-1}+\cdots\cdots+b_{n-2}t^2$$

両辺を比較して

$$a_0\alpha^n+a_1\alpha^{n-1}+\cdots\cdots+a_n=0,$$
$$na_0\alpha^{n-1}+(n-1)a_1\alpha^{n-2}+\cdots\cdots+a_{n-1}=0$$

すなわち $f(x)=0$ が α を重根にもつための条件は $f(\alpha)=0$ および $f'(\alpha)=0$ が成り立つことである．

この原稿は「代数関数に対しての導関数の定義」で「重解」と「接線の定義」を結びつけたものである．

一般に代数学では，次のような写像 D を微分（または微分子）と呼ぶ．

体 K の K への写像 D が a，$b\in$ K に対して

$$D(a+b)=D(a)+D(b)$$
$$D(ab)=aD(b)+bD(a)$$

を満たす．

【15】 微分方程式の解法

演算子 D による微分方程式の代数的な解き方に触れておわりとしたい．積分は D^{-1} で記される．

$$(D+\lambda)y=0 \quad \text{すなわち} \quad \frac{dy}{dx}+\lambda y=0$$

の解は $y=ce^{-\lambda x}$ であるが，この $e^{\lambda x}y=c$ は $D(e^{\lambda x}y)=0$ を満たす．これは

$$D(e^{\lambda x}y)=e^{\lambda x}Dy+\lambda e^{\lambda x}y=e^{\lambda x}(D+\lambda)y$$

となる．これを最初から使っていたら初めの方程式は $D(e^{\lambda x}y)=0$ より解 $y=ce^{-\lambda x}$ を得る．

そこで，$D^m(e^{\lambda x}y)$ を考えるのにライプニッツの定理

$$D^m(yz)=\sum_{r=0}^{m}\binom{m}{r}D^ryD^{m-r}z$$

において $z=e^{\lambda x}$ とおく．$D^{m-r}e^{\lambda x}=\lambda^{m-r}e^{\lambda x}$ だから次のようになる．

$$D^m(e^{\lambda x}y)=e^{\lambda x}\left\{\sum_{r=0}^{m}\binom{m}{r}\lambda^{m-r}D^r\right\}y$$
$$=e^{\lambda x}(D+\lambda)^my$$

これを用い，$D^m(e^{-\alpha x}y)=e^{-\alpha x}(D-\alpha)^my$ であるから，方程式 $(D-\alpha)^my=F(x)$ の解は

$$y=e^{\alpha x}D^{-m}e^{-\alpha x}F(x)$$

である．特に $(D-\alpha)^my=0$ の解は $y=e^{\alpha x}D^{-m}0$ すなわち

$$y=e^{\alpha x}(a_1x^{m-1}+a_2x^{m-2}+\cdots\cdots+a_m)$$

となる．

次に方程式 $aD^2y+bDy+cy=F(x)$ を考える．$f(D)=aD^2+bD+c$ とおくと $f(D)y=F(x)$ と記される．$f(t)=0$ の解を α，β とすると

$$f(D)=a(D-\alpha)(D-\beta)$$

となることが分かる．したがって部分分数に分解して

$$\frac{a}{f(D)}=\frac{1}{\alpha-\beta}\left(\frac{1}{D-\alpha}-\frac{1}{D-\beta}\right)$$

または $\quad \dfrac{a}{f(D)}=\dfrac{1}{(D-\alpha)^2}$

でこれより $y=\dfrac{F(x)}{f(D)}$ が求められる．

$(D-\alpha)(D-\beta)y=0$ の解は $y=c_1e^{\alpha x}+c_2e^{-\beta x}$

$(D-\alpha)^2y=0$ の解は $y=e^{-\alpha x}(c_1x+c_2)$

また $-\alpha=p+qi$，$-\beta=p-qi$ とすると

$$y=e^{px}(c_1e^{iqx}+c_2e^{-iqx})$$

となるが，$e^{i\theta}=\cos\theta+i\sin\theta$ で書きかえ，$c_1\pm c_2$ をそれぞれ c_1，c_2 でおき直し

$$y=e^{px}(c_1\cos qx+c_2i\sin qx)$$

の形で求められる．

（東京都立新宿高等学校）