入試問題のある関数方程式を新しい視点で解く

仁平(にへい)　政一(まさかず)

1. はじめに

関数方程式とは，関数を未知数とする方程式である．たとえば，よく知られている関数方程式

$$f(x+y)=f(x)+f(y) \qquad \cdots\cdots ①$$

は，任意の x，y に対して等式①を満たす R 上で定義された関数を求めることである．ここに，R は実数全体の集合を表す．

関数方程式に関する問題は，毎年入試問題に出題されている．たとえば，1999年2月に実施された慶応大学・医学部の入試に，次のような関数方程式に関する問題（良問）が出題されている（一部改題）．

問題　関数 $F(x)$ が次の性質(i)，(ii)，(iii)を満たしている．

(i)　$F(x)$ の定義域は実数全体で，その値は常に正である．

(ii)　任意の実数 x_1 と任意の実数 x_2 に対して，$F(x_1+x_2)=2F(x_1)F(x_2)$ が成り立つ．

(iii)　関数 $G(x)$ を $G(x)=\log F(x)$ で定義すると，$G(x)$ は $x=3$ で微分可能で $G'(3)=G(1-\log 2)$ である．

以下の問いに答えなさい．

(1)　$F(0)=F(0+0)$ に注意して $F(0)$ の値を求めよ．

(2)　任意の実数 a に対して $G(x)$ は $x=a$ で微分可能であることを証明しなさい．

(3)　$G(x)$ を求めなさい．

(4)　$F(x)$ を求めなさい．

この問題からもわかるように，高校の教材として関数方程式を扱う場合，何らかの形で微分可能性を仮定しているのが通例である．

ところで，上記の問題で微分可能性を仮定せず連続性のみを仮定した場合，高校生の学習内容の範囲で解くことができるだろうか．本稿ではこの疑問に対して肯定的な解答を与える．さらに，上記の問題で与えられている条件

$$G'(3)=G(1-\log 2)$$

における数字1，2，3について「なぜ1，2，3なのか，特になぜ3を条件として与えたのか」についても考察する．

2. 関数方程式 $f(x+y)=2f(x)f(y)$ の連続解

上記の問題を直接扱う代わりに，条件(i)，(ii)を削除した次の関数方程式を考える．もちろん関数は R 上で定義された連続関数とする．

(Ⅰ)　$$\boldsymbol{f(x+y)=2f(x)f(y)} \qquad \cdots\cdots ②$$

ここで，話を簡潔にするために，補助定理を用意する．

補助定理． 関数 $f(x)$ は R 上で連続とする．このとき任意の実数 x と任意の正の数 h に対して $F(x)=\int_x^{x+h} f(t)\,dt$ とおけば，$F(x)$ は微分可能であり，

$$F'(x)=f(x+h)-f(x)$$

である．

（証明は，たとえば参考文献 [1] $p.192$ を参照されたい．）

関数方程式（Ⅰ）の解． 等式②において，$x=y=0$ とおくと $f(0)=2f(0)f(0)$ となるから，

$$f(0)=0 \quad \text{または} \quad f(0)=\frac{1}{2}$$

を得る．

$f(0)=0$ のときは，等式②で $y=0$ とおくことにより，自明な関数 $f(x)=0$ が得られる．

よって，以下 $f(0)=\dfrac{1}{2}$ とする．

$f(x)$ は R 上で連続であるから，任意の閉区間上で積分可能である．そこで，等式②の両辺を閉区間 [0，1] で y について積分すると

$$\int_0^1 f(x+y)\,dy=2f(x)\int_0^1 f(y)\,dy$$

となる．ここで，式の左辺を $x+y=u$ と変換し，$\int_0^1 f(y)dy=c$ とおくと

$$\int_x^{x+1} f(u)du=2cf(x)$$

となる．ところで，$f(x)$ はR上で連続であるから，補助定理より，$\int_x^{x+1} f(u)du$ は微分可能となる．したがって，$c\neq 0$ ならば，$f(x)$ も微分可能になる．そこで，②の両辺を y に関して微分すると

$$f'(x+y)=2f(x)f'(y)$$

となる．

いま，$y=0$ とすると　$f'(x)=2f(x)f'(0)$

よって，$f'(0)=k$ とおけば，

$$\frac{f'(x)}{f(x)}=2k$$

となる．この式の両辺を x に関して積分すれば

$$\log|f(x)|=2kx+d \quad (d\text{ は積分定数})$$

これより，$|f(x)|=e^{2kx}e^d$ を得る．

ここで，右辺が常に正で $f(0)=\frac{1}{2}$ であることに注意すれば

$$f(x)=\frac{e^{cx}}{2} \quad (c\text{ は定数}) \quad \cdots\cdots ③$$

が得られる．

残っているのは，$c=\int_0^1 f(y)dy=0$ のときである．積分の第一平均値の定理より

$$0=\int_0^1 f(y)dy=f(\xi) \quad (0<\xi<1)$$

となる ξ が存在するから，この ξ を用いて，②で $y=\xi$ とおくと，$f(x+\xi)=2f(x)f(\xi)$ が成り立つ．

ところで，$f(\xi)=0$ であるから $f(x+\xi)=0$ を得る．x は任意の実数だから，

$$f(x)=f(x-\xi+\xi)=2f(x-\xi)f(\xi)=0$$

より自明な関数 $f(x)=0$ が得られる．したがって，求める関数は，

$$f(x)=0 \text{ と } f(x)=\frac{e^{cx}}{2}$$

である．

以上の議論より，定積分を利用すれば，微分可能性を仮定しなくても，高校の範囲内の知識で解が求められることがわかる．

次に，問題の条件

$$g'(3)=g(1-\log 2)$$

について考えてみよう（**筆者はこの条件に使われている数字 1，2，3（特に 3）に興味がそそられた**）．

$g(x)=\log f(x)$ であるから，③より，

$$g(x)=\log\frac{e^{cx}}{2}=cx-\log 2$$

よって　$g'(x)=c$

一方，$g'(3)=g(1-\log 2)$ であるから，

$$c=c(1-\log 2)-\log 2$$

となり，この式より $c=-1$ を得る．この場合，解は③より

$$f(x)=\frac{e^{-x}}{2}$$

となる．さて，$g'(x)=c$ なのだから，問題の条件「$G'(3)=G(1-\log 2)$」における 3 は，右辺に使われている数字が 1，2 なので，遊びごころでそのようにしたのではと推測できる．問題作成者もおそらくこのことで楽しんだのではないでしょうか．

3. おわりに

本稿の冒頭に登場した，最もよく知られている関数方程式 $f(x+y)=f(x)+f(y)$ も，本稿で述べた手法を用いると，簡単に解が求められる（[3]）．さらに，多少複雑な関数方程式

$$f(x+y)=f(x)+f(y)+f(x)f(y) \text{ や}$$
$$f(x+y)+f(x-y)=2\{f(x)+f(y)\}$$

も本稿の方法で解くことができる．一度，試してみませんか．もちろん関数はすべてR上で定義された連続関数とする．

〈参 考 文 献〉

[1] 田島一郎著，数学解析入門，好学社，1970.

[2] 佐藤良一郎，二，三の初等的な関数方程式の解き方，日本数学教育学会誌，数学教育　37-6, 1983.

[3] 拙著，関数方程式 $f(x+y)=f(x)+f(y)$ の連続解，数学セミナー，1990年5月号，日本評論社.

（茨城県立藤代高等学校，1999年5月末日記）