2変数の微分積分学の基本定理

田代（たしろ） 久人（ひさと）

被積分関数が1変数のときの微分積分学の基本定理 $\frac{d}{dx}\int_a^x f(t)dt=f(x)$ の $f(t)$ が $f(x,\ t)$ と2変数の被積分関数となったとき，次の関係式が成り立つ．

$$\boxed{\frac{d}{dx}\int_a^x f(x,\ t)dt=\int_a^x \frac{\partial}{\partial x}f(x,\ t)dt+f(x,\ x)}$$

数学が得意な生徒に，偏微分の図形的な意味を紹介し，若干の計算問題の演習を課し，上の定理の証明を理解させたのち，「検算に使いなさい」と言って使用させている．

これを使うと，結果の見通しが容易につく場合がある．

偏微分法は大学では，数学の講義より先に，1年生の物理学でおかまいなしに出てくるだろうし，また，予備校では，物理の授業に出てきたと言って，浪人生から感謝されたこともある．証明は次のようになるが途中の……の部分が空白の虫食い問題にして解かせている．

【証明】

$$\frac{d}{dx}\int_a^x f(x,\ t)dt$$

$$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\int_a^{x+\Delta x} f(x+\Delta x,\ t)dt-\int_a^x f(x,\ t)dt}{\Delta x}$$

$$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{1}{\Delta x}\left\{\int_a^{x+\Delta x} f(x+\Delta x,\ t)dt-\int_a^{x+\Delta x} f(x,\ t)dt\right.$$

$$\left.+\int_a^{x+\Delta x} f(x,\ t)dt-\int_a^x f(x,\ t)dt\right\}$$

$$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{1}{\Delta x}\int_a^{x+\Delta x}\{f(x+\Delta x,\ t)dt-f(x,\ t)\}dt$$

$$+\lim_{\Delta x\to 0}\frac{1}{\Delta x}\int_x^{x+\Delta x} f(x,\ t)dt$$

（偏微分の定義と積分の平均値の定理から）

$$=\int_a^x \frac{\partial}{\partial x}f(x,\ t)dt+f(x,\ x)$$ ［証明終］

（※） 勿論，この定理の系として，$\frac{d}{dx}\int_a^x f(t)dt=f(x)$ が容易に導かれる．

今から約30年前，新任の数学教師になった年に出会った入試問題［次の例題］を解いていて，何か公式がないか？ と思い，それ以来「秘かに」使わせている．

毎年数題これが役立つ問題が出題されている．

（'99では，「慶応（理工）3番」など．

'00では，「北里大（医）3番」，「日本女子大（理）4番」，「姫路工大（工）3番」，「前橋工科大3番」など）

例題 x に関する連続な関数 $f(x)$ が次の関係を満たしている．

$$f(x)=xe^x+\int_0^x f(t)\sin(x-t)dt$$

(1) $f''(x)$ を求めよ．

(2) $f(x)$ を求めよ． ['71 早大理工]

《解答1（従来の方法）》

(1) 変数を分離して

$$f(x)=xe^x+\sin x\int_0^x f(t)\cos t\,dt$$

$$-\cos x\int_0^x f(t)\sin t\,dt$$

積の微分法から，

$$f'(x)=(1+x)e^x+\cos x\int_0^x f(t)\cos t\,dt$$

$$+f(x)\sin x\cos x$$

$$+\sin x\int_0^x f(t)\sin t\,dt-f(x)\cos x\sin x$$

$$=(1+x)e^x+\cos x\int_0^x f(t)\cos t\,dt$$

$$+\sin x\int_0^x f(t)\sin t\,dt$$

$$f''(x)=(2+x)e^x-\sin x\int_0^x f(t)\cos t\,dt+f(x)\cos^2 x$$

$$+\cos x\int_0^x f(t)\sin t\,dt+f(x)\sin^2 x$$

$$=(2+x)e^x+f(x)-\int_0^x f(t)\sin(x-t)\,dt$$
$$=2(x+1)e^x$$

(2) （途中略：旧課程）微分方程式を解いて，

$$f(x)=2(x-1)e^x+x+2$$

《**解答 2**（定理を用いる方法）》

(1) $f'(x)=(1+x)e^x+\int_0^x f(t)\cos(x-t)\,dt$

$$f''(x)=(2+x)e^x+\int_0^x f(t)(-1)\sin(x-t)\,dt+f(x)$$
$$=(2+x)e^x+xe^x=2(x+1)e^x$$

（東京都立成瀬高等学校）