サイコロの問題と集合

内山(うちやま) 秀紀(ひでき)，松岡(まつおか) 学(まなぶ)

§0 序

確率で，サイコロの問題を指導する際，〝余分なものを引いたり足したりする〟という考え方で解く問題がある．この考え方は，直観的には非常に分かりやすいのだが，その反面少しあいまいな感じもする．

そこで，この考え方を数学的に正確に表現するためにはどうすればよいかを考えていたところ，集合の和集合の個数公式を用いれば，正確に表現できることに気づいたので，そのことをここにまとめておく．

あと，集合論の確率への応用として，完全順列についても記述した．

§1 サイコロの問題

まず，確率の問題としては典型的な次の問題を考える．

問題 1

1つのサイコロを4回投げるとき，出た目の最大値が5，最小値が3である確率を求めよ．

(解答) 出る目が4回ともa以上b以下である確率を$P(a \leqq x \leqq b)$と表すと，求める確率Pは，

$$P = P(3 \leqq x \leqq 5) - P(3 \leqq x \leqq 4) - P(4 \leqq x \leqq 5) + P(x=4) \quad \cdots \text{①}$$

$$= \left(\frac{3}{6}\right)^4 - \left(\frac{2}{6}\right)^4 - \left(\frac{2}{6}\right)^4 + \left(\frac{1}{6}\right)^4$$

$$= \frac{81-16-16+1}{6^4} = \frac{25}{648}$$

(解答終り)

(解説) 最大値が5，最小値が3ということは，4回とも3以上5以下の目が出なければいけないので

$$P(3 \leqq x \leqq 5)$$

最大値が5のとき，少なくとも1回は5の目が出なければならないので

$$P(3 \leqq x \leqq 5) - P(3 \leqq x \leqq 4)$$

最小値が3のとき，少なくとも1回は3の目が出なければならないので

$$P(3 \leqq x \leqq 5) - P(3 \leqq x \leqq 4) - P(4 \leqq x \leqq 5)$$

ここで，4回とも4の目が出る確率を余分に引き過ぎているので，求める確率Pは，

$$P = P(3 \leqq x \leqq 5) - P(3 \leqq x \leqq 4) - P(4 \leqq x \leqq 5) + P(x=4)$$

となる． (解説終り)

これは非常に明快で，すっきりした解答である．しかし，余分なものを〝引いたり足したりする〟という直観的な所が少し分かりづらいような気もする．そこで，集合の和集合の個数公式を用いると，この考え方を数学的に正確に表現することができるので，次の項ではそのことについて述べようと思う．

§2 集合を用いて考える

この項では，問題を集合の言葉を用いて考えてみようと思う．ただし，用いる公式は，次の和集合の個数の公式だけである．

> **公式** Uを全体集合，A，Bをその部分集合とすると
>
> $$n(\mathrm{A} \cup \mathrm{B}) = n(\mathrm{A}) + n(\mathrm{B}) - n(\mathrm{A} \cap \mathrm{B})$$

さて，サイコロを4回投げるとき，最大値が5，最小値が3である場合の数を，集合の言葉を用いて数えてみたい．1回目に出る目をk，2回目に出る目をl，3回目に出る目をm，4回目に出る目をnとする．$1 \leqq k, l, m, n \leqq 6$である．ここで，集合Uとその部分集合A，Bを，このような整数の組(k, l, m, n)として，次のように定義する．

$$\mathrm{U} = \{(k, l, m, n) \mid 3 \leqq k, l, m, n \leqq 5\}$$

$$\mathrm{A} = \{(k, l, m, n) \mid 3 \leqq k, l, m, n \leqq 4\}$$

$$\mathrm{B} = \{(k, l, m, n) \mid 4 \leqq k, l, m, n \leqq 5\}$$

和集合A∪Bの補集合$\mathrm{U} \setminus (\mathrm{A} \cup \mathrm{B})$について考える．

$(k,\ l,\ m,\ n)\in \mathrm{U}\backslash(\mathrm{A}\cup\mathrm{B})$ とすると

$(k,\ l,\ m,\ n)\notin \mathrm{A}$ より，$k,\ l,\ m,\ n$ のうち少なくとも1つは5

同様に $(k,\ l,\ m,\ n)\notin \mathrm{B}$ より，$k,\ l,\ m,\ n$ のうち少なくとも1つは3（正確には，ド・モルガンの法則 $\overline{\mathrm{A}\cup\mathrm{B}}=\overline{\mathrm{A}}\cap\overline{\mathrm{B}}$ である）．

よって

$\mathrm{U}\backslash(\mathrm{A}\cup\mathrm{B})=\{(k,\ l,\ m,\ n)\mid\{k,\ l,\ m,\ n\}$ の最大値が5，最小値が3$\}$

すなわち，サイコロを4回投げるとき，最大値が5，最小値が3である場合の数は，集合の言葉を用いると，$n(\mathrm{U}\backslash(\mathrm{A}\cup\mathrm{B}))$ となる．

したがって

$$\begin{aligned}n(\mathrm{U}\backslash(\mathrm{A}\cup\mathrm{B}))&=n(\mathrm{U})-n(\mathrm{A}\cup\mathrm{B})\\&=n(\mathrm{U})-\{n(\mathrm{A})+n(\mathrm{B})-n(\mathrm{A}\cap\mathrm{B})\}\\&=n(\mathrm{U})-n(\mathrm{A})-n(\mathrm{B})+n(\mathrm{A}\cap\mathrm{B})\end{aligned}$$

ここで $n(\mathrm{U})=3^4$，$n(\mathrm{A})=n(\mathrm{B})=2^4$，$n(\mathrm{A}\cap\mathrm{B})=1$ より

$$\left(\begin{aligned}\because \mathrm{A}\cap\mathrm{B}&=\{(k,\ l,\ m,\ n)\mid 4\leqq k,\ l,\ m,\ n\leqq 4\}\\&=\{(4,\ 4,\ 4,\ 4)\}\end{aligned}\right)$$

$$n(\mathrm{U}\backslash(\mathrm{A}\cup\mathrm{B}))=3^4-2^4-2^4+1=50$$

となり，サイコロを4回投げるときの最大値が5，最小値が3である場合の数が，集合の個数の公式を用いて求められた．

また，サイコロを4回投げるときの全事象の個数は　$6^4=1296$

よって，求める確率 P は　$P=\dfrac{50}{1296}=\dfrac{25}{648}$

§3　公式①の証明

ここでは，問題の（解答）で用いた公式①を簡単に証明しておく．

サイコロを4回投げるときの全事象をT，その個数を $n(\mathrm{T})$ とする．前項で求めた公式

$$n(\mathrm{U}\backslash(\mathrm{A}\cup\mathrm{B}))=n(\mathrm{U})-n(\mathrm{A})-n(\mathrm{B})+n(\mathrm{A}\cap\mathrm{B})$$

の両辺を $n(\mathrm{T})$ で割ると

$$\frac{n(\mathrm{U}\backslash(\mathrm{A}\cup\mathrm{B}))}{n(\mathrm{T})}=\frac{n(\mathrm{U})}{n(\mathrm{T})}-\frac{n(\mathrm{A})}{n(\mathrm{T})}-\frac{n(\mathrm{B})}{n(\mathrm{T})}+\frac{n(\mathrm{A}\cap\mathrm{B})}{n(\mathrm{T})}$$

ここで，問題の（解答）の記号を用いると

$$P=P(3\leqq x\leqq 5)-P(3\leqq x\leqq 4)-P(4\leqq x\leqq 5)+P(x=4)$$

となる．

よって，公式①が“余分なものを引いたり足したりする”という直観的な言葉ではなく，数学的に正確に証明された．

§4　完全順列と集合

集合の確率への応用の1つとして，いわゆる完全順列についても少し触れておく．

まずは，集合の和集合の個数公式から準備しておく．3つの場合は，教科書に書いてあるように

$$\begin{aligned}n(\mathrm{A}_1\cup\mathrm{A}_2\cup\mathrm{A}_3)&=n(\mathrm{A}_1)+n(\mathrm{A}_2)+n(\mathrm{A}_3)\\&\quad-n(\mathrm{A}_1\cap\mathrm{A}_2)-n(\mathrm{A}_2\cap\mathrm{A}_3)\\&\quad-n(\mathrm{A}_1\cap\mathrm{A}_3)+n(\mathrm{A}_1\cap\mathrm{A}_2\cap\mathrm{A}_3)\\&=\sum_{i=1}^{3}n(\mathrm{A}_i)-\sum_{1\leqq i<j\leqq 3}n(\mathrm{A}_i\cap\mathrm{A}_j)\\&\quad+n(\mathrm{A}_1\cap\mathrm{A}_2\cap\mathrm{A}_3)\end{aligned}$$

となるが，4つ以降も同じ形の公式が成り立つ

> **公式**　U を全体集合，A_1，A_2，A_3，A_4 をその部分集合とすると
>
> $$\begin{aligned}&n(\mathrm{A}_1\cup\mathrm{A}_2\cup\mathrm{A}_3\cup\mathrm{A}_4)\\&=\sum_{i=1}^{4}n(\mathrm{A}_i)-\sum_{i<j}n(\mathrm{A}_i\cap\mathrm{A}_j)\\&\quad+\sum_{i<j<k}n(\mathrm{A}_i\cap\mathrm{A}_j\cap\mathrm{A}_k)\\&\quad-n(\mathrm{A}_1\cap\mathrm{A}_2\cap\mathrm{A}_3\cap\mathrm{A}_4)\end{aligned}$$

さて，本題に入ろう．完全順列の問題の出し方には，色々な表現があるが，今回は問題の本質が見えやすいように，最も簡略化した形で出しておく．

問題2

1，2，3，4を並べ変えた列 a_1，a_2，a_3，a_4 について，任意の i で $a_i\neq i$ となる並べ方は何通りあるか．

（解説）　これぐらいなら，実際に数えてもいいのだが，一般の n の場合への拡張をも視野に入れ，今回は集合の考えを用いた解答を考えてみる．

（解答）　すべての並べ方は $4!$ 通り．

これから，1つ以上一致している場合 ${}_4\mathrm{C}_1\times 3!$（通り）を引く．

$$4!-{}_4\mathrm{C}_1\times 3!$$

2つ以上一致している場合 ${}_4\mathrm{C}_2\times 2!$（通り）を引き過ぎているのでこれを足す．

$$4!-{}_4\mathrm{C}_1\times 3!+{}_4\mathrm{C}_2\times 2!$$

3つ以上一致している場合 ${}_4C_3\times 1!$（通り）を足し過ぎているのでこれを引く．

$$4!-{}_4C_1\times 3!+{}_4C_2\times 2!-{}_4C_3\times 1!$$

最後に，4つ一致している場合 ${}_4C_4$（通り）を引き過ぎているのでこれを足す．

$$4!-{}_4C_1\times 3!+{}_4C_2\times 2!-{}_4C_3\times 1!+{}_4C_4$$

よって，求める並べ方の総数は

$4!-{}_4C_1\times 3!+{}_4C_2\times 2!-{}_4C_3\times 1!+{}_4C_4$ …… ②

$=24-24+12-4+1$

$=9$（通り）　（解答終り）

これは，非常にシンプルですっきりした解答であるが，〝余分なものを引いたり足したりする〟という所が，直観的であり少しあいまいな感じがする．そこで，集合の概念を用いて，この解答を数学的に正確に記述しようと思う．

$\mathrm{U}=\{(a_1,\ a_2,\ a_3,\ a_4)\,|\,a_1,\ a_2,\ a_3,\ a_4$ は 1，2，3，4 を並べ変えたもの$\}$，

$\mathrm{A}_i=\{(a_1,\ a_2,\ a_3,\ a_4)\,|\,a_i=i\}$ $(i=1,\ 2,\ 3,\ 4)$

と定める．

和集合 $\mathrm{A}_1\cup\mathrm{A}_2\cup\mathrm{A}_3\cup\mathrm{A}_4$ の補集合

$\mathrm{U}\backslash(\mathrm{A}_1\cup\mathrm{A}_2\cup\mathrm{A}_3\cup\mathrm{A}_4)$ について考える．

$(a_1,\ a_2,\ a_3,\ a_4)\in\mathrm{U}\backslash(\mathrm{A}_1\cup\mathrm{A}_2\cup\mathrm{A}_3\cup\mathrm{A}_4)$ とすると

$(a_1,\ a_2,\ a_3,\ a_4)\notin\mathrm{A}_1\cup\mathrm{A}_2\cup\mathrm{A}_3\cup\mathrm{A}_4$ より，各 i に対して

$$(a_1,\ a_2,\ a_3,\ a_4)\notin\mathrm{A}_i \quad つまり \quad a_i\neq i$$

よって，任意の i で $a_i\neq i$ となるような並べ方は，集合の言葉を用いると $n(\mathrm{U}\backslash(\mathrm{A}_1\cup\mathrm{A}_2\cup\mathrm{A}_3\cup\mathrm{A}_4))$ 通りとなる．よって，和集合の個数公式を用いると

$n(\mathrm{U}\backslash(\mathrm{A}_1\cup\mathrm{A}_2\cup\mathrm{A}_3\cup\mathrm{A}_4))$

$=n(\mathrm{U})-n(\mathrm{A}_1\cup\mathrm{A}_2\cup\mathrm{A}_3\cup\mathrm{A}_4)$

$=n(\mathrm{U})-\sum_{i=1}^{4}n(\mathrm{A}_i)+\sum_{i<j}n(\mathrm{A}_i\cap\mathrm{A}_j)$

$\qquad-\sum_{i<j<k}n(\mathrm{A}_i\cap\mathrm{A}_j\cap\mathrm{A}_k)+n(\mathrm{A}_1\cap\mathrm{A}_2\cap\mathrm{A}_3\cap\mathrm{A}_4)$

ここで，$n(\mathrm{U})=4!$，$n(\mathrm{A}_i)=3!$，$n(\mathrm{A}_i\cap\mathrm{A}_j)=2!$，$n(\mathrm{A}_i\cap\mathrm{A}_j\cap\mathrm{A}_k)=1!$，$n(\mathrm{A}_1\cap\mathrm{A}_2\cap\mathrm{A}_3\cap\mathrm{A}_4)=1$ より

$n(\mathrm{U}\backslash(\mathrm{A}_1\cup\mathrm{A}_2\cup\mathrm{A}_3\cup\mathrm{A}_4))$

$=4!-{}_4C_1\times 3!+{}_4C_2\times 2!-{}_4C_3\times 1!+1$

$=24-24+12-4+1$

$=9$

となる．これは，（解答）の②式と一致している．よって，②式を，集合の個数公式を用いることによって，〝余分なものを引いたり足したりする〟という直観的な言葉を用いずに，数学的に正確に記述することができた．

最後に，この方法は一般の n の場合の完全順列に対しても，同じように適用できることを述べておく．

（三重県立上野工業高等学校，三重県立長島高等学校）