三角形の五心のチェバの定理による統一的証明

君島（きみしま）　巖（いわお）

§1　はじめに

三角形の五心がいずれも一点に会することや，また別にチェバの定理なるものがあり，ある条件があれば一点に会することは良く知られている．私は以前から，ひょっとしたらチェバの定理が三角形の五心の性質を支えているのではないだろうかと考えていました．しかし，傍心と外心がチェバの定理になじまない感じであきらめていました．この度思い切って考察したところきれいに証明出来ることが分かりここに紹介する次第です．

§2　準　備

チェバの定理は普通図 **A** が教科書に載っているが，図 B の形でも成り立っている（証明略）．

チェバの定理

三角形 ABC の 3 頂点 A，B，C と三角形の辺またはその延長上にない 1 つの点 S を結ぶ直線が，それぞれ辺 BC，CA，AB またはその延長と交わる点を P，Q，R とすれば

$$\frac{BP}{PC}\cdot\frac{CQ}{QA}\cdot\frac{AR}{RB}=1$$

である．逆も成り立つ．

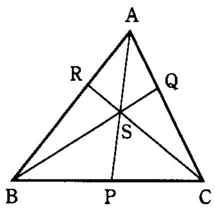


図　A

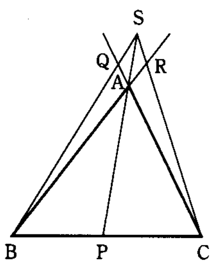


図　B

次の定理も後の証明に用いる．

三角形の角 A または角 A の外角の 2 等分線が辺 BC またはその延長と交わる点を D とすると，

$$\frac{AB}{AC}=\frac{BD}{DC}$$

である．

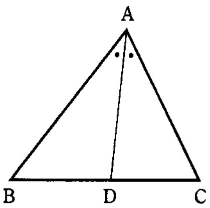


図　C

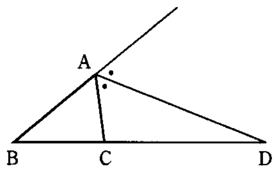
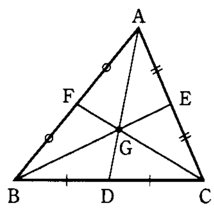


図　D

§3　五心のチェバの定理による証明

(1)　重心

三角形 ABC の各辺の中点を D，E，F とする．

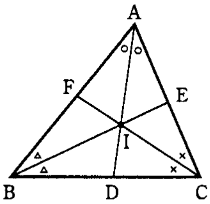


$\frac{BD}{DC}\cdot\frac{CE}{EA}\cdot\frac{AF}{FB}=1$ は明らかである．

よって，AD，BE，CF は一点 G に会する．

(2)　内心

三角形 ABC の頂点の 2 等分線が各辺と交わる点を D，E，F とする．

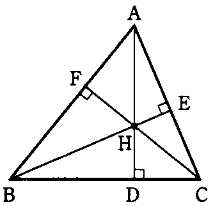


$$\frac{BD}{DC}\cdot\frac{CE}{EA}\cdot\frac{AF}{FB}=\frac{AB}{AC}\cdot\frac{BC}{AB}\cdot\frac{AC}{BC}$$
$$=1 \quad〔\because\ 図C〕$$

∴　AD，BE，CF は一点 I に会する．

(3)　垂心

三角形 ABC の各頂点から対辺に垂線を下ろし，その足を D，E，F とする．

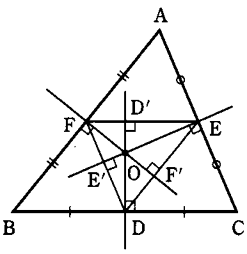


$$\frac{BD}{DC}\cdot\frac{CE}{EA}\cdot\frac{AF}{FB}$$
$$=\frac{AB\cos B}{AC\cos C}\cdot\frac{BC\cos C}{AB\cos A}\cdot\frac{AC\cos A}{BC\cos B}=1$$

∴　AD，BE，CF は一点Hに会する．

(4)　外心

三角形 ABC の各辺の中点 D，E，F から垂直二等分線を引く．次に DE，EF，FD を結ぶ．△DEF と上記の垂直二等分線との交点を D′，E′，F′ とする．



BD＝CD，CE＝EA だから，中点連結定理より

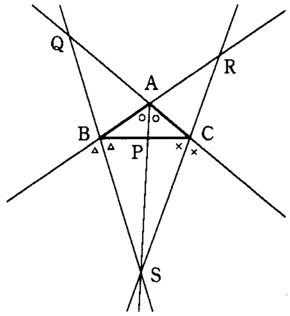
DE∥AB

また FF′⊥AB だから　　FF′⊥DE

同様にして　　DD′⊥FE，EE′⊥DF

∴　△ABC の各辺の垂直二等分線は△DEF の垂心Oと同一の点で一点に会する．明らかにここでも $\frac{DF'}{F'E}\cdot\frac{ED'}{D'F}\cdot\frac{FE'}{E'D}=1$ が成り立つ．

(5)　傍心



角Aの 2 等分線と BC の交点を P，
角Bの外角の 2 等分線と AC の延長との交点を Q，
角Cの外角の 2 等分線と AB の延長との交点を R とする．

$$\frac{BP}{PC}=\frac{AB}{AC} \qquad (図C)$$
$$\frac{CQ}{QA}=\frac{BC}{BA} \qquad (図D)$$
$$\frac{AR}{RB}=\frac{AC}{BC} \qquad (図D)$$

∴　$\frac{BP}{PC}\cdot\frac{CQ}{QA}\cdot\frac{AR}{RB}=\frac{AB}{AC}\cdot\frac{BC}{BA}\cdot\frac{AC}{BC}=1$

∴　一点Sに会する．

(栃木県立黒磯南高等学校)