カージオイド（心臓形）について

えんどう　かずなり
遠藤　一成

1 はじめに

新課程の数学Cで学ぶいろいろな曲線は，美しさ興味深さだけでなく，数学の他の分野とのつながりにおいて新しい切り口を提供している．本稿では，カージオイド（心臓形）という1つの曲線を通して

(1) 微分
　　グラフをかくこと
(2) 積分
　　曲線の長さ
　　囲まれる部分の面積
　　x 軸のまわりの回転体の体積
(3) 軌跡
　　初等的定義
　　外サイクロイドの特殊な場合としての定義
(4) 複素数平面上の写像

について考察することを目的とする．
特に(4)では，写像 $w=z^2$ は円をカージオイドに，反転 $w=\dfrac{1}{z}$ は，カージオイドを放物線に移す．

2 グラフ

カージオイドは，a を正の定数として，極座標を用いて表すと

$$r=a(1+\cos\theta) \qquad (0\leqq\theta<2\pi) \quad \cdots\cdots ①$$

また，θ を媒介変数と考えて，直交座標で表すと

$$\begin{cases} x=a(1+\cos\theta)\cos\theta \\ y=a(1+\cos\theta)\sin\theta \end{cases} \quad \cdots\cdots ②$$

さらに，θ を消去すれば

$$a^2(x^2+y^2)=(x^2+y^2-ax)^2 \quad \cdots\cdots ③$$

と表すことができる．

次に，グラフをかくために，②より

$$\frac{dx}{d\theta}=-a\sin\theta\cos\theta-a(1+\cos\theta)\sin\theta$$
$$=-a(\sin\theta+\sin2\theta) \quad \cdots\cdots ④$$

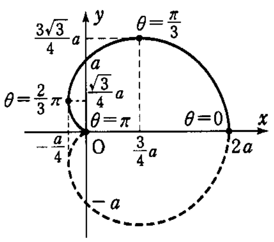
$$\frac{dy}{d\theta}=a(-\sin^2\theta)+a(1+\cos\theta)\cos\theta$$
$$=a(\cos\theta+\cos2\theta) \quad \cdots\cdots ⑤$$

よって

$$\frac{dy}{dx}=-\frac{\cos\theta+\cos2\theta}{\sin\theta+\sin2\theta}=-\frac{1}{\tan\frac{3}{2}\theta}$$

②の θ に $-\theta$ を代入すると $(x,\ y)$ は $(x,\ -y)$ となるので，グラフは x 軸対称である．
したがって，増減表は次のようになり，グラフの概形は下図のようになる．

θ	0	$\cdots$	$\frac{\pi}{3}$	$\cdots$	$\frac{\pi}{2}$	$\cdots$	$\frac{2\pi}{3}$	$\cdots$	π
$\frac{dy}{dx}$	$-\infty$	$-$	0	$+$	1	$+$	∞	$-$	0
x	$2a$		$\frac{3}{4}a$		0		$-\frac{a}{4}$		0
y	0		$\frac{3\sqrt{3}}{4}a$		a		$\frac{\sqrt{3}}{4}a$		0



3 曲線の長さ，面積，体積

カージオイド $r=a(1+\cos\theta)$ $(0\leqq\theta\leqq2\pi)$ の長さを L とおくと，④，⑤より

$$\left(\frac{dx}{d\theta}\right)^2+\left(\frac{dy}{d\theta}\right)^2$$
$$=a^2(\cos\theta+\cos2\theta)^2+a^2(\sin\theta+\sin2\theta)^2$$
$$=2a^2(1+\cos\theta)$$
$$=4a^2\cos^2\frac{\theta}{2}$$

したがって

$$L=2\int_0^{\pi}2a\cos\frac{\theta}{2}\,d\theta=8a$$

カージオイドで囲まれる部分の面積を S,

$0\leqq\theta\leqq\frac{2}{3}\pi$, $\frac{2}{3}\pi\leqq\theta\leqq\pi$ の部分の曲線を y_1, y_2 とすると

$$\begin{aligned}S&=2\int_{-\frac{a}{4}}^{2a}y_1\,dx-2\int_{-\frac{a}{4}}^{0}y_2\,dx\\&=2\int_{\frac{2}{3}\pi}^{0}y_1\frac{dx}{d\theta}d\theta-2\int_{\frac{2}{3}\pi}^{\pi}y_2\frac{dx}{d\theta}d\theta\\&=2\int_0^{\pi}a^2(1+\cos\theta)\sin\theta\times\sin\theta(1+2\cos\theta)d\theta\\&=2a^2\int_0^{\pi}\sin^2\theta(2\cos^2\theta+3\cos\theta+1)d\theta\\&=\frac{3\pi a^2}{2}\end{aligned}$$

極座標で表された面積公式を用いれば，もっと簡単に

$$\begin{aligned}S&=\int_0^{2\pi}\frac{1}{2}r^2d\theta\\&=\frac{a^2}{2}\int_0^{2\pi}(1+\cos\theta)^2d\theta\\&=\frac{3\pi a^2}{2}\end{aligned}$$

カージオイドを x 軸のまわりに1回転してできる立体の体積を V とすると

$$\begin{aligned}V&=\pi\int_{-\frac{a}{4}}^{2a}{y_1}^2dx-\pi\int_{-\frac{a}{4}}^{0}{y_2}^2dx\\&=\pi a^3\int_0^{\pi}(1+\cos\theta)^2(1+2\cos\theta)\sin^3\theta\,d\theta\end{aligned}$$

$\cos\theta=t$ とおくと

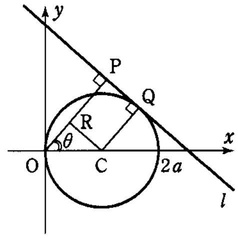
$$\begin{aligned}&=\pi a^3\int_{-1}^{1}(1+t)^2(1+2t)(1-t^2)dt\\&=2\pi a^3\int_0^{1}(1+4t^2-5t^4)dt\\&=\frac{8}{3}\pi a^3\end{aligned}$$

4 軌　跡

本章では，次の2通りの方法で，初等幾何を用いて，軌跡としてカージオイドを導き出す．

> **問1**　点C$(a,\ 0)$を中心，半径 a の円の接線 l に原点Oから下ろした垂線の足をPとする．点Pの軌跡の方程式は $r=a(1+\cos\theta)$ であることを示せ．

証明　Cから直線OPに垂線CRを下ろす．右図において，四角形PQCRは長方形なので



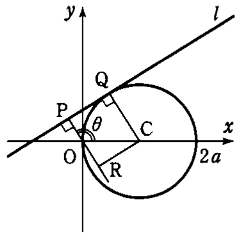
(ア)　$0\leqq\theta\leqq\frac{\pi}{2}$ のとき

$$\begin{aligned}OP&=OR+RP\\&=OR+CQ\end{aligned}$$

よって

$$r=a\cos\theta+a$$

(イ)　$\frac{\pi}{2}<\theta<\pi$ のとき



$$\begin{aligned}OP&=RP-OR\\&=CQ-OR\end{aligned}$$

よって

$$r=a-a\cos(\pi-\theta)$$

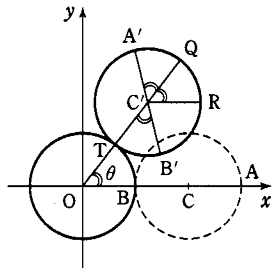
以上より

$$r=a(1+\cos\theta)$$

つまり，カージオイドである．

> **問2**　中心$(a,\ 0)$，半径 $\frac{a}{2}$ の円が，中心$(0,\ 0)$，半径 $\frac{a}{2}$ の円にすべることなく接しながらひとまわりして元の位置に戻る．
> 点 $A\left(\frac{3}{2}a,\ 0\right)$ の描く軌跡を x 軸方向に $\frac{a}{2}$ 平行移動するとカージオイド $r=a(1+\cos\theta)$ になることを示せ．

証明　右図において



$$\overset{\frown}{BT}=\overset{\frown}{B'T}$$

なので

$$\begin{aligned}\angle A'C'Q&=\angle B'C'T\\&=\angle BOT=\theta\end{aligned}$$

$C'R\,/\!/\,OA$ とすれば

$$\angle QC'R=\angle TOB=\theta$$

よって

$$\angle A'C'R=2\theta$$

したがって

$$\begin{aligned}\overrightarrow{OA'}&=\overrightarrow{OC'}+\overrightarrow{C'A'}\\&=a(\cos\theta,\ \sin\theta)+\frac{a}{2}(\cos2\theta,\ \sin2\theta)\end{aligned}$$

x 軸方向に $\frac{a}{2}$ 平行移動すると

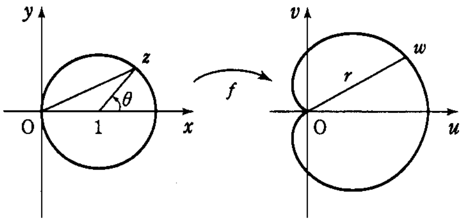
$$\begin{aligned}x&=a\cos\theta+\frac{a}{2}\cos2\theta+\frac{a}{2}\\&=a\cos\theta(1+\cos\theta)\end{aligned}$$

$$y=a\sin\theta+\frac{a}{2}\sin 2\theta$$
$$=a\sin\theta(1+\cos\theta)$$

以上より，カージオイド $r=a(1+\cos\theta)$ となる．

5 複素数平面上の写像

> **問 3** 写像 $w=f(z)=z^2$ によって，下図のように円 $|z-1|=1$ がカージオイドに移されることを示せ．



証明 $z-1=\cos\theta+i\sin\theta$ とおくと

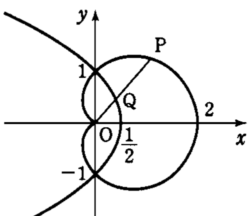
$$z=1+2\cos^2\frac{\theta}{2}-1+2i\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2}$$
$$=2\cos\frac{\theta}{2}\left(\cos\frac{\theta}{2}+i\sin\frac{\theta}{2}\right)$$
$$w=z^2=4\cos^2\frac{\theta}{2}(\cos\theta+i\sin\theta)$$

したがって

$$r=|w|=4\cos^2\frac{\theta}{2}=2(1+\cos\theta)$$

つまり，w はカージオイドを描く．

> **問 4** 反転 $w=g(z)=\frac{1}{z}$ により，カージオイド $r=\frac{a}{2}(1+\cos\theta)$ は放物線 $y^2=-\frac{4}{a}\left(x-\frac{1}{a}\right)$ に移されることを示せ．



($a=2$の場合)

証明 $w=\frac{1}{z}=\frac{\bar{z}}{|z|^2}=\frac{\cos\theta+i\sin\theta}{r}$

よって $R=|w|=\frac{1}{r}=\frac{2}{a(1+\cos\theta)}$

ここで極座標から直交座標に直そう．

$$aR=2-aR\cos\theta$$

ゆえに $a^2(x^2+y^2)=(2-ax)^2$

$$y^2=-\frac{4}{a}\left(x-\frac{1}{a}\right) \quad \cdots\cdots ⑥$$

つまり，w は放物線を描く．

注意 1 放物線⑥の焦点は a に関係なく常に原点である．

注意 2 反転 $w=\frac{a}{z}$ により，カージオイド $r=\frac{a}{2}(1+\cos\theta)$ は，a の値に関係なく放物線 $y^2=-4(x-1)$ に移る．

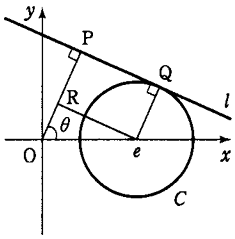
注意 3 単位円 $|z|=1$ を放物線 $y^2=-4(x-1)$ に移すには写像 $w=\frac{4}{(z+1)^2}$ を使えばよい．

これは，「平行移動 $+z^2+$ 反転」という合成写像である．

6 おわりに

極方程式で考えると，カージオイドと放物線が反転によって移されることを見出すことは容易である．更に，問 4 の一般化を考えることができる．

> **問 5** e を正の定数とする．中心 $(e,\ 0)$ 半径 1 の円 C の接線 l に原点 O から垂線 OP を下ろす．点 P の軌跡を反転 $w=\frac{1}{z}$ により移すと円錐曲線 $r=1+e\cos\theta$ となることを示せ．



証明 問 1 と同様に考えて

$$\mathrm{OP}=\mathrm{OR}+\mathrm{RP}$$
$$r=e\cos\theta+1$$

次に，問 4 と同様に考えて

$$R=|w|=\frac{1}{r}$$
$$=\frac{1}{e\cos\theta+1}$$

したがって $0<e<1$ のとき 楕円

$e=1$ のとき 放物線

$e>1$ のとき 双曲線

を表している．

〈参 考 文 献〉

数研通信 特別号 3 $p\,16$〜$p\,18$

(愛知県滝高等学校)