二次曲線の新しい統一的理解

片岡（かたおか）　宏信（ひろのぶ）

1. はじめに

楕円・双曲線・放物線はまとめて二次曲線と言われる．これらの曲線をまとめて統一的に理解する方法はいくつか知られている．１つにはこれらの曲線は，円錐を平面で切ったときの切り口の曲線として現れるということが知られている．

もう１つは，$ax^2+hxy+by^2+gx+fy+c=0$ という式で二次曲線を表したとき，

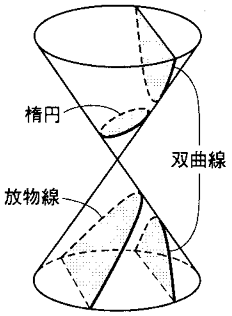
$h^2-4ab<0$ のとき楕円，

$h^2-4ab>0$ のとき双曲線，

$h^2-4ab=0$ のとき放物線

になるというものである．

ここでは，それらの方法のほかに２本の直線の式を使った，もう１つの統一的理解の方法を示す．



2. 二次曲線の分類

平行でない２直線を表す一次関数 $f(x,\ y)=0$, $g(x,\ y)=0$ があるとき，$f(x,\ y)$, $g(x,\ y)$ を使って表すことができる二次の式は，

$$f^2+g^2=k, \tag{1}$$

$$fg=k, \tag{2}$$

$$f=kg^2 \text{ または } g=kf^2 \tag{3}$$

に限られる．$f^2-g^2=k$ の形の式は因数分解により，$(f+g)(f-g)=k$ となるので(2)の式に帰着する．

これらの式の表す図形を考えると，まず(1)での $k<0$ は，図形にならない．$k=0$ のときは，$f=g=0$ となり，２直線 $f(x,\ y)=0$, $g(x,\ y)=0$ の交点を表している．また，(2)(3)での $k=0$ は $f(x,\ y)=0$ または $g(x,\ y)=0$ の２直線を表している．したがってそれら以外の場合，すなわち

$$f^2+g^2=k\ \ (k>0), \tag{4}$$

$$fg=k\ \ (k\neq 0), \tag{5}$$

$$f=kg^2 \text{ または } g=kf^2\ \ (k\neq 0) \tag{6}$$

の場合を考える．このとき，式(4)は楕円，式(5)は双曲線，式(6)は放物線を表している．そして直線 $f=0$, $g=0$ またはその平行線は，二次曲線と密接な関係にある．詳しい証明は参考文献を参照していただくとして，ここでは主な結論のみを述べることにする．

3. 楕円について

式(4)において，$f(x,\ y)=ax+by+c$, $g(x,\ y)=lx+my+n$ とするとき，

$$(ax+by+c)^2+(lx+my+n)^2=k\ \ (k>0) \tag{7}$$

は楕円を表す式となっている．このことは，(7)を展開して

$$(a^2+l^2)x^2+(b^2+m^2)y^2+(2ab+2lm)xy$$
$$+(2ac+2lm)x+(2bc+2mn)y+c^2+n^2-k=0$$

より，

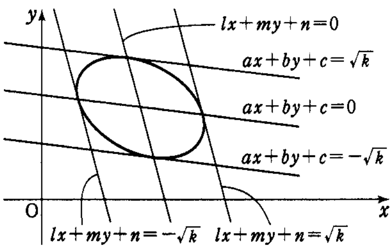
$$(2ab+2lm)^2-4(a^2+l^2)(b^2+m^2)$$
$$=-4(am-bl)^2<0$$

となることよりわかる．

$ax+by+c=\pm\sqrt{k}$, $lx+my+n=\pm\sqrt{k}$ はこの楕円の接線になっており，接点はそれぞれ楕円と $dx+ey+f=0$, $ax+by+c=0$ との交点である．

楕円の軸の方程式は，$ax+by+c=0$, $lx+my+n=0$ が直交するときには，それぞれが軸の方程式になっている．直交していないときには，$A=ab+de$, $B=a^2+d^2$, $C=b^2+e^2$ とすると，

$$y-\frac{af-cd}{bd-ae}$$
$$=\frac{C-B\pm\sqrt{4A^2+(C-B)^2}}{2A}\left(x-\frac{ec-bf}{bd-ae}\right)$$
となる．

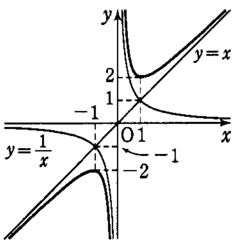


4. 双曲線について

式(5)において，$f(x,\ y)=ax+by+c$，
$g(x,\ y)=lx+my+n$ とするとき，
$$(ax+by+c)(lx+my+n)=k\ \ (k\neq 0) \tag{8}$$
は双曲線を表す式となっており，このとき
$ax+by+c=0$，$lx+my+n=0$ は双曲線の漸近線となっている．この式が双曲線を表すことは，式(8)を展開して，
$$alx^2+bmy^2+(am+bl)xy+(an+cl)x$$
$$+(bn+cm)y+cn-k=0$$
この式より，
$$(am+bl)^2-4albm=(am-bl)^2>0$$
となることよりわかる．

双曲線の標準形として知られている式
$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$$
は
$$\left(\frac{x}{a}+\frac{y}{b}\right)\left(\frac{x}{a}-\frac{y}{b}\right)=1$$
となるので，たしかに(8)の形を満たしている．

いくつか例をあげてみると，
$$x(y-x)=1$$
これは $y=x+\frac{1}{x}$ のグラフであり，漸近線は
$x(y-x)=0$ より，
$x=0$（y 軸），$y=x$ である．



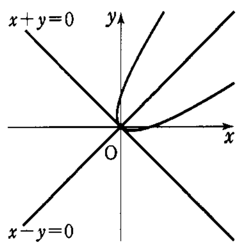
$$(x-2)(y-3)=4$$
これは，$y=\frac{4}{x-2}+3$ となり，分数関数の式である．
漸近線は，$(x-2)(y-3)=0$ より，
$x=2$，$y=3$ である．

5. 放物線について

式(6)において，$f(x,\ y)=ax+by+c$，
$g(x,\ y)=lx+my+n$ とするとき，例えば
$$ax+by+c=k(lx+my+n)^2\ \ (k\neq 0) \tag{9}$$
は放物線を表している．このことは，(9)を展開して
$$kl^2x^2+km^2y^2+2klmxy+(2kln-a)x$$
$$+(2kmn-b)y+(kn^2-c)=0$$
より，
$$(2klm)^2-4kl^2km^2=0$$
となることから，明らかである．ここで，
$ax+by+c=0$ と $lx+my+n=0$ が直交するときには，その交点は放物線の頂点を表しており，
$lx+my+n=0$ は放物線の軸になっている．そして，$ax+by+c=0$ は軸に直交し頂点を通る直線である．

また直交しないときには，$lx+my+n=0$ は2直線の交点を通り軸に平行な直線になっており，
$ax+by+c=0$ は2直線の交点を接点とする放物線の接線になっている．このとき，軸の方程式は，
$$lx+my+n=\frac{bm+al}{2k(l^2+m^2)} \tag{10}$$
となる．また頂点の座標は，
$$\frac{bm+al}{2k(l^2+m^2)}=D$$
とおくと，
$$x=\frac{b(D-n)+m(-kD^2+c)}{bl-am}$$
$$y=\frac{a(D-n)+l(-kD^2+c)}{am-bl}$$
となる．

例えば
$$y=kx^2$$
は $y=0$ と $x=0$ に直交するので，交点 $(0,\ 0)$ が頂点となり，$x=0$ が軸の方程式である．また，
$$x+y=k(x-y)^2$$
は，$x-y=0$ と $x+y=0$ も直交するので，交点 $(0,\ 0)$ が頂点であり，
$x-y=0$ が軸の方程式である．



6. まとめ

二次曲線を円錐の切り口として理解する方法は直感的であるが，なぜ円錐なのか，その他に二次曲線はないのかという疑問が付きまとう．また h^2-4ab の値によって判別するのはいかにも天下り的で理解した感じがしない．しかしここで述べた方法は確かにすべてをつくしていることがわかり，簡単な例で確認することもできる．さらに標準形といわれるものよりはるかに一般的である．ここでの内容は，生徒に物事を統一的に理解する事の重要性を教える教材として有用であると考える．

また，例えば放物線といえば軸が x 軸または y 軸に平行なものしか考えられなくなっている生徒に対して，高校生の力でも発見出来るような高校レベルの発見学習の内容として，応用できるものであろうと考える．

〈参　考　文　献〉

[1]　チャート式，基礎からの数学C
[2]　片岡宏信「双曲線を表す一般形について」
数研通信 No. 26
[3]　片岡宏信「放物線を表す一般形について」
日本数学教育学会誌，第79巻，第5号，p.33

(兵庫県立姫路商業高等学校)