最大最小問題考

松田(まつだ)　康雄(やすお)

1. はじめに

筆者は以前，最大・最小問題を微分を使わないで，代数的に解けないものかと考えたことがあった．最大・最小問題は，数学の中でも現実と直接つながっていることが多く，結構面白い素材である．これを，数学IIIの微分を習わない文系の生徒達にも紹介したい，と思ったのがきっかけである．そうすると，有理形関数の場合「相加平均≧相乗平均」の関係を使えば計算できる場合があることに気が付いた．そのことをかつて[2](参考文献参照)で発表した．その後，[1]から『ベルヌーイの不等式』というのがあって，これが微分と「相加平均≧相乗平均」の関係を結んでいることを知った．そこで，微分を使わないで「相加平均≧相乗平均」の関係で計算できる最大・最小問題は，ベルヌーイの不等式でも証明できるはずである．

本稿は，ベルヌーイの不等式を通して見たある最大・最小問題を考える．

2. 問題

> **問題．** 体積が一定の直円柱で，表面積が最小なるのはどのようなものか．

解答1．(微分を使った解法)

円柱の底面の円の半径を r，高さを h，表面積を S，体積を V とすると

$$S=2\pi r^2+2\pi rh \qquad \cdots\cdots(1)$$

$$V=\pi r^2 h\ (=\text{一定}) \qquad \cdots\cdots(2)$$

このとき，S の最小値を計算する．(2)から

$$h=\frac{V}{\pi r^2} \qquad \cdots\cdots(3)$$

(3)を(1)に代入して

$$S=2\pi r^2+\frac{2V}{r} \qquad \cdots\cdots(4)$$

(4)を r で微分して

$$\frac{dS}{dr}=4\pi r-\frac{2V}{r^2}=\frac{4\pi}{r^2}\left(r^3-\frac{V}{2\pi}\right)$$

$r>0$ の範囲で S の増減は次の表のようになる．

r	0	$\cdots$	$\sqrt[3]{\frac{V}{2\pi}}$	$\cdots$
$\frac{dS}{dr}$		$-$	0	$+$
S		↘	極小	↗

したがって

$$r=\sqrt[3]{\frac{V}{2\pi}} \qquad \cdots\cdots(5)$$

のとき S は最小になる．

このとき，(3)より

$$h=\sqrt[3]{\frac{4V}{\pi}}=2r \qquad \cdots\cdots(6)$$

したがって，正面から見ると正方形になる直円柱が求めるものである．

解答2．(「相加平均≧相乗平均」の関係を使った解法)

(4)を

$$S=2\pi r^2+\frac{V}{r}+\frac{V}{r}$$

と変形する．「相加平均≧相乗平均」の関係から

$$S\geqq 3\sqrt[3]{2\pi r^2\cdot\frac{V}{r}\cdot\frac{V}{r}}=3\sqrt[3]{2\pi V^2}$$

S が最小になるのは，等号が成り立つときだから

$$2\pi r^2=\frac{V}{r}$$

より，(5)および(6)のときで，(1)と同じ結論を得る．

この問題は，容積が決まっている直円柱の缶詰を作るとき，どんな形にすれば材料が最も少なくて済むか，と言い換えられる．缶詰やタンクを見てみると，正面から見ると正方形になる円柱が割と多い．

以前，ある缶詰の会社に，缶詰の形について電話で尋ねてみた．その会社の人の返事は，缶詰の形は，

中身や用途によって決めるのであって，缶の材料の量で決めるのではないということであった．しかし，何千，何万個と大量生産する場合，材料をちょっとでも節約するのはとても重要なことだと思う．

3. ベルヌーイの不等式

ベルヌーイの不等式とは

$$t^n-nt+(n-1)\geqq 0$$

$$(t>0,\ n\text{ は自然数}) \qquad \cdots\cdots(7)$$

で，$n\geqq 2$ のとき，等号成立は $t=1$ のときに限る，というものである．

[1]には，ベルヌーイの不等式と微分・積分の定義，およびベルヌーイの不等式と「相加平均≧相乗平均」の関係の同値性が，それぞれ独立して示されている．すなわち，ベルヌーイの不等式は微分と「相加平均≧相乗平均」の関係を橋渡ししているのである．

最も簡単な場合，「相加平均≧相乗平均」の関係が成り立つならばベルヌーイの不等式が成り立つことを示してみる．

$n-1$ を $(n-1)$ 個の 1 の和と考えて，「相加平均≧相乗平均」の関係を使うと

$$\frac{t^n+(n-1)}{n}=\frac{t^n+1+\cdots\cdots+1}{n}$$
$$\geqq\sqrt[n]{t^n\cdot 1\cdots\cdots 1}=t$$

$t>0$ なのでこれから，(7)が示され，等号成立の場合も言える．

4. 問題の再考

ベルヌーイの不等式は微分と「相加平均≧相乗平均」の関係を橋渡ししているのだから，2. の問題はベルヌーイの不等式を使って解けるはずである．

そのために(7)を変形する．(7)の t を改めて $at\ (a>0)$ とおくと

$$a^nt^{n-1}+\frac{n-1}{t}\geqq na\ \ (a>0,\ t>0) \qquad \cdots\cdots(8)$$

$n\geqq 2$ のとき，等号成立は $t=\dfrac{1}{a}$ のときに限る．

ここで(8)のベルヌーイの不等式を使って，2. の問題を考えてみる．

解答 3．（ベルヌーイの不等式を使った解法）

(4)は

$$S=V\left(\frac{2\pi}{V}r^2+\frac{2}{r}\right)$$

と変形できる．(　)の中は

$$t=r,\ \ n=3,\ \ a=\sqrt[3]{\frac{2\pi}{V}}$$

の場合だから，

$$S\geqq 3V\sqrt[3]{\frac{2\pi}{V}}=3\sqrt[3]{2\pi V^2}$$

S が最小になるのは，等号が成り立つときだから，$r=\sqrt[3]{\dfrac{V}{2\pi}}$ のとき，すなわち，(3)より $h=2r$ のときである．

5. 終わりに

筆者は，最大・最小問題を考えるときに，個別に「相加平均≧相乗平均」の関係を使って代数的に考えてきた．今後は，最大・最小問題だけでなく不等式の問題を含めて，このベルヌーイの不等式を通して，統一的に考えていきたい．

〈参　考　文　献〉

[1] 柴田敏男，不等式についての 4 つの話，季刊数学工房22号，1999．

[2] 松田康雄，最大最小問題譚，初等数学第29号，1996，88-89．

（明治学園高等学校）