行列の対角化とジョルダン標準形

松岡　学（まつおか　まなぶ）

0. はじめに

今回は，行列の n 乗を求める問題を行列の対角化，ジョルダン標準形などを用いて理論的に解説することを試みた．そしてその応用として，数列の漸化式，微分方程式の問題を考察した．

1. 対角化の一般論

行列 $A=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ に対して

$$t^2-(a+d)t+ad-bc$$

を A の固有多項式，

$$t^2-(a+d)t+ad-bc=0$$

を A の固有方程式という．また，$A\vec{p}=\alpha\vec{p}$ となるような α と $\vec{0}$ でない $\vec{p}$ が存在するとき，α を A の固有値，$\vec{p}$ を A の固有値 α に属する固有ベクトルという．

さて，行列 $A=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ に対して，その固有方程式 $t^2-(a+d)t+ad-bc=0$ が異なる 2 つの実数解 α，β をもつとする．$A\vec{p}=\alpha\vec{p}$，$A\vec{q}=\beta\vec{q}$ となるような $\vec{p}=\begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \end{pmatrix}$，$\vec{q}=\begin{pmatrix} q_1 \\ q_2 \end{pmatrix}$ が存在する．

具体的には $\begin{pmatrix} b \\ \alpha-a \end{pmatrix}$，$\begin{pmatrix} \alpha-d \\ c \end{pmatrix}$ の $\vec{0}$ でない方を $\vec{p}$，$\begin{pmatrix} b \\ \beta-a \end{pmatrix}$，$\begin{pmatrix} \beta-d \\ c \end{pmatrix}$ の $\vec{0}$ でない方を $\vec{q}$ とおけばよい．

ここで，行列 P を $P=\begin{pmatrix} p_1 & q_1 \\ p_2 & q_2 \end{pmatrix}$ とおくと，P は正則行列となり　$P^{-1}AP=\begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \beta \end{pmatrix}$　が成り立つ．

$P^{-1}AP=\begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \beta \end{pmatrix}$ の両辺を n 乗すると

$P^{-1}A^nP=\begin{pmatrix} \alpha^n & 0 \\ 0 & \beta^n \end{pmatrix}$ となる．

よって，$A^n=P\begin{pmatrix} \alpha^n & 0 \\ 0 & \beta^n \end{pmatrix}P^{-1}$ となり A^n が求まる．

問題 1

行列 $A=\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}$ について，A^n を求めよ．

(解答)　A の固有方程式は $t^2-5t+6=0$ となる．

$(t-2)(t-3)=0$ より　$t=2,\ 3$

よって，A の固有値は 2，3

$\vec{p}=\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$，$\vec{q}=\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ とおくと $\vec{p}$ は固有値 2 に属する固有ベクトル，$\vec{q}$ は固有値 3 に属する固有ベクトルとなる．ここで $P=\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ とおくと

$P^{-1}=\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$ となり $P^{-1}AP=\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$ が成り立つ．

$P^{-1}AP=\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$ の両辺を n 乗すると

$P^{-1}A^nP=\begin{pmatrix} 2^n & 0 \\ 0 & 3^n \end{pmatrix}$ となる．

$$\text{よって}\quad A^n=P\begin{pmatrix} 2^n & 0 \\ 0 & 3^n \end{pmatrix}P^{-1}$$
$$=\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2^n & 0 \\ 0 & 3^n \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$$
$$=\begin{pmatrix} 2^{n+1}-3^n & -2^{n+1}+2\cdot3^n \\ 2^n-3^n & -2^n+2\cdot3^n \end{pmatrix}$$

（解答終り）

2. ジョルダン標準形

この節では行列 A の固有方程式が重解をもつ場合を考察する．$A=\begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \alpha \end{pmatrix}$ の場合は，初めから対角行列になっているので，この場合は除いて考える．

$A\neq\begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \alpha \end{pmatrix}$ なる行列 $A=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ に対して，その固有方程式 $t^2-(a+d)t+ad-bc=0$ が重解 α をもつとする．まず，$A\vec{p}=\alpha\vec{p}$ なる $\vec{0}$ でない $\vec{p}$ を定める．具体的には，$\begin{pmatrix} b \\ \alpha-a \end{pmatrix}$，$\begin{pmatrix} \alpha-d \\ c \end{pmatrix}$ の $\vec{0}$ でない方

を$\vec{p}$とおけばよい．
ケーリー・ハミルトン方程式より　$(A-\alpha E)^2=O$
よって，任意のベクトル$\vec{q}$に対して
$(A-\alpha E)^2\vec{q}=\vec{0}$ となるので，
$A(A-\alpha E)\vec{q}=\alpha(A-\alpha E)\vec{q}$ が成り立つ．
よって $\vec{p}/\!/(A-\alpha E)\vec{q}$ となるので，$\vec{p}=(A-\alpha E)\vec{q}$ かつ $\vec{p}\not\parallel\vec{q}$ となるように$\vec{q}$をとれる．
$\vec{p}=(A-\alpha E)\vec{q}$ より　$A\vec{q}=\vec{p}+\alpha\vec{q}$
以上をまとめると $\begin{cases} A\vec{p}=\alpha\vec{p} \\ A\vec{q}=\vec{p}+\alpha\vec{q} \end{cases}$
$\vec{p}=\begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \end{pmatrix}$，$\vec{q}=\begin{pmatrix} q_1 \\ q_2 \end{pmatrix}$ とし，行列Pを $P=\begin{pmatrix} p_1 & q_1 \\ p_2 & q_2 \end{pmatrix}$ とおくと，Pは正則行列であり，

$$A\begin{pmatrix} p_1 & q_1 \\ p_2 & q_2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \alpha p_1 & p_1+\alpha q_1 \\ \alpha p_2 & p_2+\alpha q_2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} p_1 & q_1 \\ p_2 & q_2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \alpha & 1 \\ 0 & \alpha \end{pmatrix}$$

となる．よって，$P^{-1}AP=\begin{pmatrix} \alpha & 1 \\ 0 & \alpha \end{pmatrix}$ が成り立つ．これを，行列Aのジョルダン標準形という．Aのジョルダン標準形が求まれば，$\begin{pmatrix} \alpha & 1 \\ 0 & \alpha \end{pmatrix}^n=\begin{pmatrix} \alpha^n & n\alpha^{n-1} \\ 0 & \alpha^n \end{pmatrix}$ より A^n が求まる．$P^{-1}AP=\begin{pmatrix} \alpha & 1 \\ 0 & \alpha \end{pmatrix}$ の両辺をn乗すると，$P^{-1}A^nP=\begin{pmatrix} \alpha^n & n\alpha^{n-1} \\ 0 & \alpha^n \end{pmatrix}$ となるので

$$A^n=P\begin{pmatrix} \alpha^n & n\alpha^{n-1} \\ 0 & \alpha^n \end{pmatrix}P^{-1}$$

問題 2

行列 $A=\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}$ について，A^n を求めよ．

(解答 1) A の固有方程式は $t^2-6t+9=0$ となる．
$(t-3)^2=0$ より　$t=3$
よって，A の固有値は 3
$\vec{p}=\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ とおくと，$\vec{p}$は固有値 3 に属する固有ベクトルとなる．
$A-3E=\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$ より $\vec{q}=\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix}$ とおくと，$\vec{p}\not\parallel\vec{q}$ であり，$(A-3E)\vec{q}=\vec{p}$ が成り立つ．
ここで $P=\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ とおくと，$P^{-1}=\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$ となり $P^{-1}AP=\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$ が成り立つ．
$P^{-1}AP=\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$ の両辺をn乗すると
$P^{-1}A^nP=\begin{pmatrix} 3^n & n3^{n-1} \\ 0 & 3^n \end{pmatrix}$ となる．

$$\begin{aligned} \text{よって}\quad A^n&=P\begin{pmatrix} 3^n & n3^{n-1} \\ 0 & 3^n \end{pmatrix}P^{-1} \\ &=\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3^n & n3^{n-1} \\ 0 & 3^n \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \\ &=\begin{pmatrix} 3^n-n3^{n-1} & n3^{n-1} \\ -n3^{n-1} & 3^n+n3^{n-1} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

(解答終り)

(解答 1) では，ジョルダン標準形による理論的な解答を与えておいた．実際には，2 項定理を用いた解答の方が実用的なので，そちらの解答も与えておく．

(解答 2) ケーリー・ハミルトン方程式より

$$A^2-6A+9E=O$$

よって　$(A-3E)^2=O$
ここで $N=A-3E$ とおくと $N=\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$ となる．$A=3E+N$ であり

$$N^2=N^3=\cdots\cdots=N^n=O$$

2 項定理より

$$\begin{aligned} A^n&=(3E+N)^n=3^nE+n3^{n-1}N \\ &=\begin{pmatrix} 3^n & 0 \\ 0 & 3^n \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} -n3^{n-1} & n3^{n-1} \\ -n3^{n-1} & n3^{n-1} \end{pmatrix} \\ &=\begin{pmatrix} 3^n-n3^{n-1} & n3^{n-1} \\ -n3^{n-1} & 3^n+n3^{n-1} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

(解答終り)

3. 固有方程式が異なる 2 つの虚数解をもつ場合

固有方程式が異なる 2 つの虚数解をもつ場合も，1 で述べたことがそのまま成り立つ．つまり，行列 $A=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ に対して，その固有方程式 $t^2-(a+d)t+ad-bc=0$ が異なる 2 つの虚数解 α，β をもつとき，固有値 α，β に属する固有ベクトル $\vec{p}=\begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \end{pmatrix}$，$\vec{q}=\begin{pmatrix} q_1 \\ q_2 \end{pmatrix}$ を取り (具体的には $\begin{pmatrix} b \\ \alpha-a \end{pmatrix}$，$\begin{pmatrix} \alpha-d \\ c \end{pmatrix}$ の $\vec{0}$ でない方を $\vec{p}$，$\begin{pmatrix} b \\ \beta-a \end{pmatrix}$，$\begin{pmatrix} \beta-d \\ c \end{pmatrix}$ の $\vec{0}$ でない方を $\vec{q}$ とおけばよい)
行列Pを $P=\begin{pmatrix} p_1 & q_1 \\ p_2 & q_2 \end{pmatrix}$ とおくと，Pは正則行列となり，$P^{-1}AP=\begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \beta \end{pmatrix}$ が成り立つ．

よって，$A^n=P\begin{pmatrix}\alpha^n & 0\\ 0 & \beta^n\end{pmatrix}P^{-1}$ が成り立つ．

なおこの場合，固有値 $\xi\pm\eta i(\xi,\ \eta$ は実数) に対して，行列Pを $P=\begin{pmatrix}b & 0\\ \xi-a & -\eta\end{pmatrix}$ とおくと $\left(b=0\right.$ のときは，$P=\begin{pmatrix}\xi-d & -\eta\\ c & 0\end{pmatrix}$ とおく$\left.\right)$，P は正則行列となり $P^{-1}AP=\begin{pmatrix}\xi & -\eta\\ \eta & \xi\end{pmatrix}$ が成り立つことが計算によって確かめられる．$\begin{pmatrix}\xi & -\eta\\ \eta & \xi\end{pmatrix}$ は，回転行列を $\sqrt{\xi^2+\eta^2}$ 倍した行列なので，実用的にはこちらで十分である．

4. まとめ

この節では，これまでに導き出した結果をまとめておく．

定義 行列 A，B について，$P^{-1}AP=B$ となる正則行列Pが存在するとき，A と B は相似であるといい $A\sim B$ と表す．

定理 1 2 次の正方行列Aについて

(1) A の固有方程式が異なる 2 つの解をもつならば，A は対角行列と相似である

$$A\sim\begin{pmatrix}\alpha & 0\\ 0 & \beta\end{pmatrix}$$

(2) A の固有方程式が重解をもつならば，A はスカラー行列またはジョルダン標準形と相似である

$$A\sim\begin{pmatrix}\alpha & 0\\ 0 & \alpha\end{pmatrix}\quad\text{または}\quad A\sim\begin{pmatrix}\alpha & 1\\ 0 & \alpha\end{pmatrix}$$

ここで，スカラー行列 $\begin{pmatrix}\alpha & 0\\ 0 & \alpha\end{pmatrix}$ は対角行列 $\begin{pmatrix}\alpha & 0\\ 0 & \beta\end{pmatrix}$ の特別な場合であることに注意すれば，次のことが分かる．

定理 2 すべての 2 次正方行列Aは，対角行列またはジョルダン標準形と相似である．

$$A\sim\begin{pmatrix}\alpha & 0\\ 0 & \beta\end{pmatrix}\quad\text{または}\quad A\sim\begin{pmatrix}\alpha & 1\\ 0 & \alpha\end{pmatrix}$$

つまり，考える範囲を複素数にまで広げることによって，すべての 2 次正方行列は，対角行列またはジョルダン標準形と相似であることがわかった．これは，2 次方程式の解が，複素数にまで考える範囲を広げることによって，完全な形で解くことができるのと事情が似ており，非常に本質的なことである．

5. 数列の漸化式や微分方程式への応用

この節では，行列の対角化，ジョルダン標準形の理論の応用として，数列の漸化式や微分方程式の問題を考察する．

数列 $\{a_n\}$，$\{b_n\}$ が $\begin{cases}a_{n+1}=a\,a_n+b\,b_n\\ b_{n+1}=c\,a_n+d\,b_n\end{cases}$ で定められているとする．行列Aを $A=\begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix}$ とおくと $\begin{pmatrix}a_{n+1}\\ b_{n+1}\end{pmatrix}=A\begin{pmatrix}a_n\\ b_n\end{pmatrix}$ と表されるので，$\begin{pmatrix}a_n\\ b_n\end{pmatrix}=A\begin{pmatrix}a_{n-1}\\ b_{n-1}\end{pmatrix}$ より $\begin{pmatrix}a_n\\ b_n\end{pmatrix}=A^{n-1}\begin{pmatrix}a_1\\ b_1\end{pmatrix}$ となり，a_n，b_n が求まる．

問題 3 数列 $\{a_n\}$，$\{b_n\}$ が次の式で定められている．一般項を求めよ．

$$\begin{cases}a_{n+1}=2a_n-3b_n\\ b_{n+1}=\ \ a_n+6b_n\end{cases}\qquad\begin{cases}a_1=2\\ b_1=4\end{cases}$$

(解答) $A=\begin{pmatrix}2 & -3\\ 1 & 6\end{pmatrix}$ とおく．

$\begin{pmatrix}a_n\\ b_n\end{pmatrix}=A\begin{pmatrix}a_{n-1}\\ b_{n-1}\end{pmatrix}$ $(n\geqq2)$ と表される．

ここでAの固有方程式は $t^2-8t+15=0$ より $(t-3)(t-5)=0$ となり，A の固有値は 3，5 となる．

$\vec{p}=\begin{pmatrix}-3\\ 1\end{pmatrix}$，$\vec{q}=\begin{pmatrix}-1\\ 1\end{pmatrix}$ とおくとそれぞれ固有値 3，5 に属する固有ベクトルとなる．

$P=\begin{pmatrix}-3 & -1\\ 1 & 1\end{pmatrix}$ とおくと $P^{-1}=-\dfrac{1}{2}\begin{pmatrix}1 & 1\\ -1 & -3\end{pmatrix}$ であり $P^{-1}AP=\begin{pmatrix}3 & 0\\ 0 & 5\end{pmatrix}$ となる．

$P^{-1}A^nP=\begin{pmatrix}3^n & 0\\ 0 & 5^n\end{pmatrix}$ より

$$\begin{aligned}A^n&=P\begin{pmatrix}3^n & 0\\ 0 & 5^n\end{pmatrix}P^{-1}\\ &=-\frac{1}{2}\begin{pmatrix}-3 & -1\\ 1 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2 & -3\\ 1 & 6\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 1\\ -1 & -3\end{pmatrix}\\ &=-\frac{1}{2}\cdot\begin{pmatrix}-3^{n+1}+5^n & -3^{n+1}+3\cdot5^n\\ 3^n-5^n & 3^n-3\cdot5^n\end{pmatrix}\end{aligned}$$

ここで $\begin{pmatrix} a_n \\ b_n \end{pmatrix}=A^{n-1}\begin{pmatrix} a_1 \\ b_1 \end{pmatrix}$ より

$$\begin{pmatrix} a_n \\ b_n \end{pmatrix}=-\frac{1}{2}\cdot\begin{pmatrix} -3^n+5^{n-1} & -3^n+3\cdot5^{n-1} \\ 3^{n-1}-5^{n-1} & 3^{n-1}-3\cdot5^{n-1} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix} 3^{n+1}-7\cdot5^{n-1} \\ -3^n+7\cdot5^{n-1} \end{pmatrix}$$

よって　$a_n=3^{n+1}-7\cdot5^{n-1}$，$b_n=-3^n+7\cdot5^{n-1}$

（解答終り）

次に微分方程式への応用を考察する．まず，行列の指数関数 $\exp A$ について，簡単にまとめておく．行列 A に対して，A の指数関数 $\exp A$ を行列 A のベキ級数として，次のように定義する．

$$\exp A=\sum_{p=0}^{\infty}\frac{1}{p!}A^p$$

$$=E+A+\frac{1}{2!}A^2+\frac{1}{3!}A^3+\cdots\cdots$$

行列の指数関数は次の性質をもつ．

性質 1

(1) P が正則行列ならば

$$\exp(P^{-1}AP)=P^{-1}(\exp A)P$$

(2) A が定数を成分とする正方行列で t が変数ならば

$$\frac{d}{dt}\exp(tA)=A\exp(tA)$$

さて，次のような微分方程式を考える

$$\begin{cases} x'(t)=ax(t)+by(t) \\ y'(t)=cx(t)+dy(t) \end{cases} \quad \cdots\cdots ①$$

ここで $A=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$，$\vec{x}(t)=\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}$ とおくと

$\begin{pmatrix} x'(t) \\ y'(t) \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}$ より，①は

$\dfrac{d}{dt}\vec{x}(t)=A\vec{x}(t)$ と表される．

よって性質(2)より　$\vec{x}(t)=\exp(tA)\cdot\vec{x}(0)$ となる．

問題 4　次の微分方程式を解け．

$$\begin{cases} x'(t)=-x(t)+2y(t) \\ y'(t)=x(t) \end{cases} \qquad \begin{cases} x(0)=c_1 \\ y(0)=c_2 \end{cases}$$

（解答） $A=\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ とおく．

$\begin{pmatrix} x'(t) \\ y'(t) \end{pmatrix}=A\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}$ と表される．

ここで，A の固有方程式は $t^2+t-2=0$ より $(t+2)(t-1)=0$ となり，A の固有値は 1，-2 となる．

$\vec{p}=\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$，$\vec{q}=\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$ とおくと，それぞれ固有値 1，-2 に属する固有ベクトルとなる．

$P=\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ とおくと $P^{-1}=-\dfrac{1}{3}\begin{pmatrix} -1 & -2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$ であり $P^{-1}AP=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$ となる．

したがって　$\exp(P^{-1}tAP)=P^{-1}\exp(tA)P$ より

$$\exp(tA)=P\exp(t\cdot P^{-1}AP)P^{-1}$$

$$=P\exp\begin{pmatrix} t & 0 \\ 0 & -2t \end{pmatrix}P^{-1}$$

$$=P\begin{pmatrix} e^t & 0 \\ 0 & e^{-2t} \end{pmatrix}P^{-1}$$

$$=-\frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} e^t & 0 \\ 0 & e^{-2t} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 & -2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$=\frac{1}{3}\begin{pmatrix} e^t+2e^{-2t} & 2e^t-2e^{-2t} \\ e^t-e^{-2t} & 2e^t+e^{-2t} \end{pmatrix}$$

よって

$$\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}=\exp(tA)\cdot\begin{pmatrix} x(0) \\ y(0) \end{pmatrix}$$

$$=\exp(tA)\cdot\begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix}$$

$$=\frac{1}{3}\begin{pmatrix} e^t+2e^{-2t} & 2e^t-2e^{-2t} \\ e^t-e^{-2t} & 2e^t+e^{-2t} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix}$$

$$=\frac{1}{3}\begin{pmatrix} (c_1+2c_2)e^t+(2c_1-2c_2)e^{-2t} \\ (c_1+2c_2)e^t+(-c_1+c_2)e^{-2t} \end{pmatrix}$$

したがって

$$\begin{cases} x(t)=\dfrac{c_1+2c_2}{3}e^t+\dfrac{2c_1-2c_2}{3}e^{-2t} \\ y(t)=\dfrac{c_1+2c_2}{3}e^t+\dfrac{-c_1+c_2}{3}e^{-2t} \end{cases}$$

（解答終り）

〈参　考　文　献〉

「線型代数」中島惇，石川洋文，共立出版

（三重県立長島高等学校）