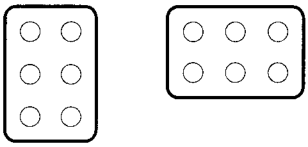
$\sum k^2$の指導

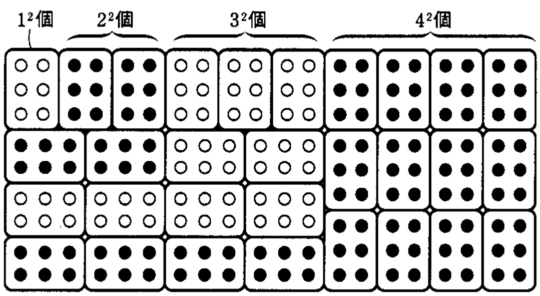
渋谷（しぶや） 紀與（みちおき）

$\sum k^2$を図示するのに，立体的に積み上げる方法は作図も説明も難しいので，平面で書きやすく，説明もしやすい方法を考えてみた．

縦，横 2：3 の比の長方形の箱に 6 個の点を入れる．



次の図のように並べることにより点の数から箱の数を数える．



$1^2+2^2+3^2+4^2$

$[1^2+2^2+3^2+4^2+\cdots\cdots+n^2]$

縦列の点の数

(最初の箱の縦の点 3 個)+(1 箱ずつ増える横の 2 個の点)

$3+(4-1)\times 2=9$

$[3+(n-1)\cdot 2=2n+1]$

横行の点の数

1 箱，2 箱と増えていき，各箱 2 個ずつ点が入るから

$(1+2+3+4)\times 2=20$

$[(1+2+3+\cdots\cdots+n)\cdot 2=n(n+1)]$

よって，すべての点の個数は

$9\times 20=180$

$[n(n+1)(2n+1)]$

すべての箱の数は

$180\div 6=30$

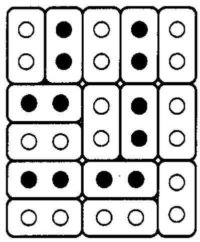
$1^2+2^2+3^2+4^2=30$

$$\left[\begin{array}{l}1^2+2^2+3^2+4^2+\cdots\cdots+n^2\\ =n(n+1)(2n+1)/6\end{array}\right]$$

蛇足ながら $\sum k$，$\sum k^4$ についても応用ができる．

$\sum k$について

長方形の箱に 2 個の点を入れ，図のように並べる．



箱の数

$1+2+3+\cdots\cdots+n$

横行の点の数

$1+1+1+\cdots\cdots+1$

$=n$

縦列の点の数　$2+1+1+\cdots\cdots+1=n+1$

点の総数　$n(n+1)$

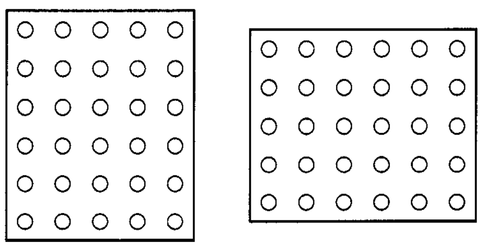
箱の総数　$n(n+1)/2$

$\sum k^4$について

$\sum k^4=1^4+2^4+3^4+\cdots\cdots+n^4$

$=n(n+1)(2n+1)(3n^2+3n-1)/30$

1 箱に 5×6 または 6×5 の計 30 個の点を並べておく．



これらの箱を次のページの図のように並べる．

横行の点の数

$$(1^2+2^2+3^2+4^2+\cdots\cdots+n^2)\times 6$$

$$=n(n+1)(2n+1)$$

縦列の点の数

はじめの 1 箱は 5 個の点

2〜3 段目の 2^4 の 2 箱×6

4〜6 段目の 3^4 の 3 箱×6

…………………

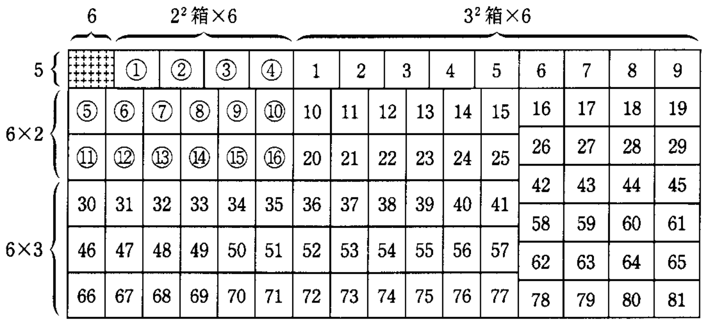
$$5+2\times 6+3\times 6+\cdots\cdots+n\times 6$$

$$=6(1+2+3+\cdots\cdots+n)-1$$

$$=6\times n(n+1)/2-1$$

$$=3n(n+1)-1$$

$$=3n^2+3n-1$$



点の総数

$$n(n+1)(2n+1)(3n^2+3n-1)$$

箱の総数

$$1^4+2^4+3^4+\cdots\cdots+n^4$$

$$=n(n+1)(2n+1)(3n^2+3n-1)/30$$

（岐阜県立海津高等学校）