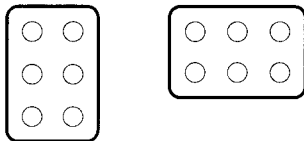


Σk^2 の指導

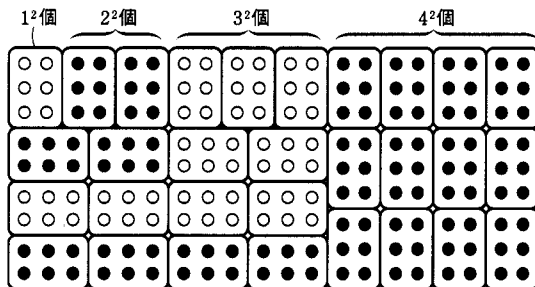
し ぶ や みちおき
 渋谷 紀興

Σk^2 を図示するのに、立体的に積み上げる方法は作図も説明も難しいので、平面で書きやすく、説明もしやすい方法を考えてみた。

縦、横 2 : 3 の比の長方形の箱に 6 個の点を入れる。



次の図のように並べることにより点の数から箱の数を数える。



$$1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2$$

$$[1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 + \dots + n^2]$$

縦列の点の数

(最初の箱の縦の点 3 個) + (1 箱ずつ増える横の 2 個の点)

$$3 + (4-1) \times 2 = 9$$

$$[3 + (n-1) \cdot 2 = 2n+1]$$

横行の点の数

1 箱、2 箱と増えていき、各箱 2 個ずつ点が入るから

$$(1+2+3+4) \times 2 = 20$$

$$[(1+2+3+\dots+n) \cdot 2 = n(n+1)]$$

よって、すべての点の個数は

$$9 \times 20 = 180$$

$$[n(n+1)(2n+1)]$$

すべての箱の数は

$$180 \div 6 = 30$$

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 = 30$$

$$\left[\begin{array}{l} 1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 + \dots + n^2 \\ = n(n+1)(2n+1)/6 \end{array} \right]$$

蛇足ながら Σk , Σk^4 についても応用ができる。

Σk について

長方形の箱に 2 個の点を入れ、図のように並べる。
 箱の数

$$1+2+3+\dots+n$$

横行の点の数

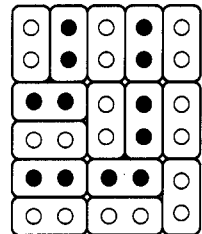
$$1+1+1+\dots+1$$

$$= n$$

縦列の点の数 $2+1+1+\dots+1 = n+1$

点の総数 $n(n+1)$

箱の総数 $n(n+1)/2$

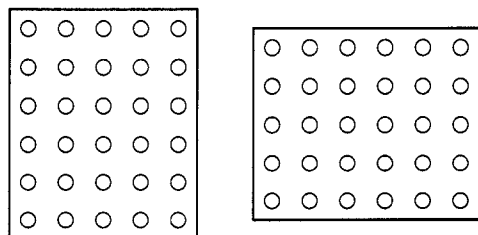


Σk^4 について

$$\Sigma k^4 = 1^4 + 2^4 + 3^4 + \dots + n^4$$

$$= n(n+1)(2n+1)(3n^2+3n-1)/30$$

1 箱に 5×6 または 6×5 の計 30 個の点を並べておく。



これらの箱を次のページの図のように並べる。

横行の点の数

$$(1^2+2^2+3^2+4^2+\dots+n^2)\times 6$$

$$=n(n+1)(2n+1)$$

縦列の点の数

はじめの1箱は5個の点

2~3段目の 2^4 の2箱×6

4~6段目の 3^4 の3箱×6

.....

$$5+2\times 6+3\times 6+\dots+n\times 6$$

$$=6(1+2+3+\dots+n)-1$$

$$=6\times n(n+1)/2-1$$

$$=3n(n+1)-1$$

$$=3n^2+3n-1$$


点の総数

$$n(n+1)(2n+1)(3n^2+3n-1)$$

箱の総数

$$1^4+2^4+3^4+\dots+n^4$$

$$=n(n+1)(2n+1)(3n^2+3n-1)/30$$

	6						2^2 箱×6					3^2 箱×6							
5		①	②	③	④	1	2	3	4	5	6	7	8	9					
6×2	⑤	⑥	⑦	⑧	⑨	⑩	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19			
	⑪	⑫	⑬	⑭	⑮	⑯	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29			
6×3	30	31	32	33	34	35	36	37	38	39	40	41	42	43	44	45			
	46	47	48	49	50	51	52	53	54	55	56	57	58	59	60	61			
	66	67	68	69	70	71	72	73	74	75	76	77	62	63	64	65			
	66	67	68	69	70	71	72	73	74	75	76	77	78	79	80	81			

(岐阜県立海津高等学校)