

回帰評価について

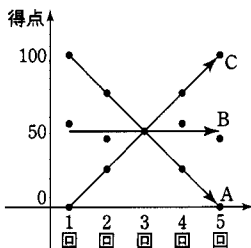
おぎわ たけし
小澤 猛

1. 評価はこれでよいか

学校では生徒に授業を行い、その成績を評価しなければならない。学年を通じて5回の試験を行うとして、それらの総得点が高い生徒が良い成績がつくのが一般的である。しかし、この評価法に疑問をもったので回帰評価法を考え出した。

2. 得点のとり方

右図は数学のある講座で5回の試験をしたとき、A, B, C君が仮にとった得点をグラフにしたものである。

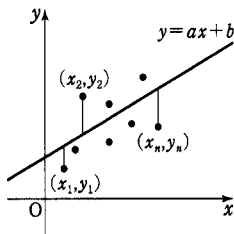


	1	2	3	4	5
A	100	75	50	25	0
B	55	45	50	55	45
C	0	25	50	75	100

数学は基礎から発展していく学問である。平均点は3人とも50点であるが、A君よりC君の点の取り方が良く、したがって、学年末の評定もA君よりC君の評定を良い成績につけたい。B君の成績には波がある。しかし、大まかに言って、いつも50点を、図のように直線的に取っているとよい。

3. 最小2乗法

座標平面上の n 個の点を (x_i, y_i) , $i=1, 2, \dots, n$ とする。1つの直線 $y=ax+b$ を考えて、



$$S_n = \sum_{i=1}^n (y_i - ax_i - b)^2$$

が最小になるように、 a, b の値を定めてみよう。

$$\frac{\partial S_n}{\partial a} = \frac{\partial S_n}{\partial b} = 0 \text{ となるように } a, b \text{ を決めればよい。}$$

$$\frac{\partial S_n}{\partial a} = -2 \sum_{i=1}^n x_i (y_i - ax_i - b)$$

$$= -2 \sum_{i=1}^n x_i y_i + 2a \sum_{i=1}^n x_i^2 + 2b \sum_{i=1}^n x_i$$

$$= 0 \text{ より}$$

$$\sum_{i=1}^n x_i y_i = a \sum_{i=1}^n x_i^2 + b \sum_{i=1}^n x_i \quad \text{①}$$

$$\frac{\partial S_n}{\partial b} = -2 \sum_{i=1}^n (y_i - ax_i - b)$$

$$= -2 \sum_{i=1}^n y_i + 2a \sum_{i=1}^n x_i + 2b \sum_{i=1}^n 1$$

$$= 0 \text{ より}$$

$$\sum_{i=1}^n y_i = a \sum_{i=1}^n x_i + b \cdot n$$

よって

$$b = \frac{-a \sum x_i + \sum y_i}{n} \quad \text{②}$$

①②より

$$\sum x_i y_i = a \sum x_i^2 + \frac{-a \sum x_i + \sum y_i}{n} \cdot \sum x_i$$

$$a \left\{ \sum x_i^2 - \frac{(\sum x_i)^2}{n} \right\} = \sum x_i y_i - \frac{\sum x_i \sum y_i}{n}$$

よって

$$a = \frac{\sum x_i y_i - \frac{\sum x_i \sum y_i}{n}}{\sum x_i^2 - \frac{(\sum x_i)^2}{n}} \quad \text{③}$$

これら②③で決まる直線 $y=ax+b$ は回帰直線と呼ばれている。

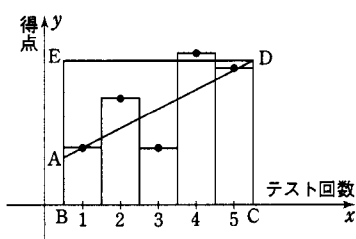
$$a = \frac{n \sum x_i y_i - \sum x_i \sum y_i}{n \sum x_i^2 - (\sum x_i)^2}$$

$$b = \frac{-a \sum x_i + \sum y_i}{n}$$

4. コンピュータの利用

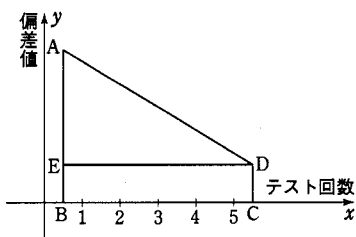
コンピュータの普及とともに、単純な相加平均に替って、複雑な評価法で、教師が成績をつけることができるようになった。昨年度、40人のクラスで5回のテストを行った。そのデータをプログラムの中に書いておいた。(プログラムは省略した)

実際に回帰評価を出して、普通の評価(総得点が大きいほど良い評価)と比較してみた。2回~5回の各々の回数までで回帰評価と普通の評価が比較できるようにした。そして、1回の回帰評価は普通の評価と同じとすることにした。



上の図で、5回のテストの総得点は柱状グラフの面積になる。直線ADを回帰直線とすれば、柱状グラフの面積はほぼ台形ABCDに等しい。これに△ADEの面積(符号付)を加えたものを回帰評価における得点とする。

$$\begin{aligned} \text{回帰評価の得点} &= \text{長方形 BCDE の面積} \\ &= \text{台形 ABCD} + \triangle ADE \text{ (符号付)} \\ &= \text{台形 ABCD} + \frac{1}{2} a \cdot BC^2 \\ &\quad (a \text{ は直線 AD の傾き}) \end{aligned}$$



5回のテストの得点が右上りに増加していても、クラスの中の相対的な成績は右下りかもしれない。この場合は得点でなく、偏差値を考えればよい。回帰評価の得点は長方形BCDEの面積になる。(上の図)

5. 傾き a と生徒の感想

筆者は実際に試験を行った結果、年度末に、回帰

直線の傾き a の大きい順にクラスの3割ほどの生徒を教室の前に並ばせてみた。 a の値の大きい順であることを生徒には伏せておく。残りの生徒に、前に並んだ生徒の特徴を尋ねる。成績に関する並び方は、どの生徒も気付かないが、残余の生徒の一致した感想は「大まかに言ってまじめ!」ということである。

数学の授業では特に、普通^の成績評価法だと、不まじめな生徒でも良い成績をとることがある。努力しない生徒でも良い成績をとることがある(当然だが)。回帰評価法はこのような部分がある程度排除し、過去の学力はそれほどには問わない成績評価法であって、まじめさを重視していると生徒は感じている。

6. 回帰評価法への移行過程

普通^のの評価法から回帰評価法へ変えるのは年度の途中からではまずい。あらかじめ生徒に回帰評価法であることを宣言して、授業を始めたほうが、生徒も納得しやすい。

4で回帰評価の得点についてその定義式を書いたが、一般には

$$\begin{aligned} & (k \text{ 回の回帰評価の得点}) \\ &= \text{台形 ABCD の面積} + a \cdot \frac{1}{2} \cdot a \cdot k^2 \end{aligned}$$

とした方がよい。

a を回帰率とすれば4での回帰評価の得点は $k=5$, $a=1$ の場合である。

普通^のの評価法から回帰評価法へ移行する場合は a の値を小から大に徐々に移行する方が、生徒、担任、保護者の理解が得られやすい。

実際には筆者は普通^のの評価法から突然、回帰評価法に $a=1$ で変えてみた。その方が評価とは何かとか、生徒の勉強に対する意欲、指導上の問題点などがよくみえると思った。

7. 回帰性

学年初めに評価法が回帰評価法であると決まれば、少し悪知恵のある生徒なら、最初の試験などは故意によくない点数をとろうとするのではないかと教師としては危惧の念をもち得る。しかし、実際にはこのようなことは心配なかった。評価される生徒も初めに手をぬいてあとになって力を発揮できる保証はないからであろう。

学年度当初数学の成績が良くても途中で努力を放棄してしまったり、学力がないと思っ、いつになっても数学の勉強を始めない生徒はよくみかける。

このような生徒にも希望を与え、まじめに努力して、数学の内容を、1つ1つよく噛み締めながら向上していくことは、回帰評価の是とするところであって、このことを回帰性と言ったらどうだろう。一般の意味の回帰とは似ても似つかないかもしれないが、回帰評価法について述べるときには必要な言葉となるだろう。

8. 回帰直線の楽しみ

2回以降の試験結果からは回帰直線が求められる。コンピュータで生徒1人1人の回帰直線を求めて、個人に返還する。生徒は意外なほどに、回帰直線

$y=ax+b$ の傾き a の値に関心をもつ。普通の学力に無関係ともいえる a の値についてだから他の生徒を気にもせず、生徒は教師に、明るく、自由に話ができる。これも回帰評価法の良いところだと思うが、これにとどまらずさらに、生徒は次回の試験で得点を伸ばし、回帰直線の傾き a の増大を約束したりする。これは生徒にとって試験は嫌なものという感情さえ変えてしまいかねない。普段だと教室で授業を受けている生徒が試験になると保健室で受験する話を耳にするが、普通の評価法の欠点が出ているのではないか、もっと大きく、大蔵省などの最近の事件なども、こんなところに問題の本質があったと言えなくもない。回帰評価法の普及を望む。

(元 都立駒場高等学校)