思考力を養うために

結川（ゆいかわ） 義明（よしあき）

はじめに

以前から，何も考えずにただ漠然と黒板の解答(それが例え間違えていたとしても)を写している生徒が気になっていた．世相を賑（にぎ）わす短絡的な事件の背景に思考する行為の欠如が密接に関係しているのではないだろうか．数学の問題を解かせる以前に，思考する態度を育成する必要があるのではないだろうか．思考させる格好の道具(教材)として〈将棋〉や〈囲碁〉があるが，ルールが難しくまた勝負が決するまでに時間がかかるので，授業で取り上げるにはいささか無理がある．そこで，ルールも簡単で，しかも勝負の決着が早く，授業で取り上げることが可能な新しいゲームを考案した．以下に，このゲームの紹介と実際に授業で取り上げたときの生徒の反応について報告する．このゲームを通し思考する楽しさを実感し，日頃の数学の授業に発展できればと考えている．諸先生方の御指導を亨受したい．

1．既存の〈○×ゲーム〉の紹介

〈○×ゲーム〉

井型の中に2人で交互に○と×を入れていき，『先に縦・横・斜めのどこかに列ができた方が勝ち』とするゲームである．

注：〈○×ゲーム〉は〈三目並べ〉とも呼ばれている．

この〈○×ゲーム〉はやってみればわかる通り，○と×双方とも列ができずに【引き分け】になることが意外に多い．実際に，3年生の4クラス(126人)に〈○×ゲーム〉を605回やってもらったところ，

○が勝った回数は165回
×が勝った回数は　91回
引き分けの回数は349回

あった．

面白いことに機械的に○と×を交互に井型に入れた場合，どちらも列ができない【引き分け】になる場合は次にあげた16通りしかなく，確率は意外に低いのである．

$$\frac{16}{{}_9C_5}=\frac{16}{126}\fallingdotseq 0.126984$$

①

○	×	○
○	×	○
×	○	×

②

○	○	×
×	×	○
○	○	×

③

×	○	×
○	×	○
○	×	○

④

×	○	○
○	×	×
×	○	○

⑤

○	×	○
×	○	○
×	○	×

⑥

○	○	×
×	○	○
○	×	×

⑦

×	○	×
○	○	×
○	×	○

⑧

×	×	○
○	○	×
×	○	○

⑨

○	×	○
○	○	×
×	○	×

⑩

○	×	×
×	○	○
○	○	×

⑪

×	○	×
×	○	○
○	×	○

⑫

×	○	○
○	○	×
×	×	○

⑬

○	×	○
○	×	×
×	○	○

⑭

○	×	○
×	×	○
○	○	×

⑮

○	○	×
×	×	○
○	×	○

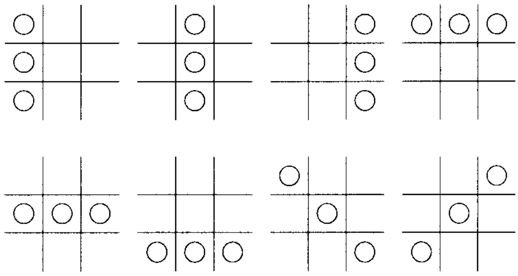
⑯

×	○	○
○	×	×
○	×	○

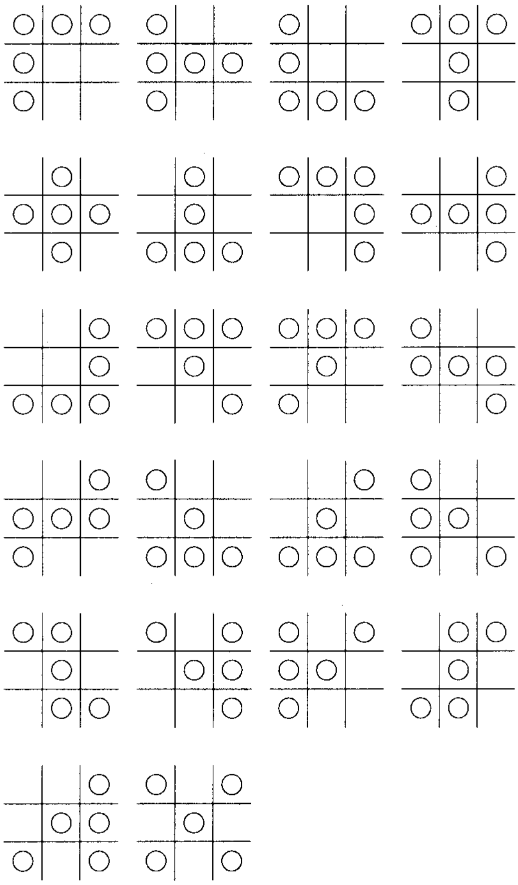
このゲームは○側は5ヵ所に○を置け，×側は4ヵ所しか×を置けないことからわかる通り，×側には不利なゲームである．実際，機械的に○と×を交互に井型に入れた場合の〈○の列ができる確率〉と〈×の列ができる確率〉を計算すると，次のようになる．

〈○の列ができる確率〉

次の図のように3個の○を縦・横・斜めに列ができるように入れ，2個の○を残った場所に入れる．
全部で $8\cdot{}_6C_2=120$ (通り) ある．



ただし，120 通りの中に下の図のように○の列が縦・横・斜めに 2 列できる場合を重複して数えている．5 つの○で 2 列できるのは 22 通りある．



したがって，○の列ができる確率は

$$\frac{120-22}{{}_9C_5} \fallingdotseq 0.7777777$$

〈×の列ができる確率〉

3 個の×を縦・横・斜めに列ができるように入れ，1 個の×を残った場所に入れる．
全部で $8 \cdot {}_6C_1 = 48$（通り）ある．

したがって，×の列ができる確率は

$$\frac{48}{{}_9C_4} \fallingdotseq 0.3809523$$

ほぼ倍の確率で○の方が列ができやすいのである．
×側にいかに不利なゲームであることがわかる．

補足

〈○×ゲーム〉は【ゲームの理論】の世界では『完全情報・有限・2 人・ゼロ和ゲーム』の 1 つに属し，
「第 1 手は隅に打つとする定石がある．これに対してせめて引き分けにする唯一の手は中央への打ち手である．（先手が）第 1 手を隅以外に打つと，これに対抗する（後手の）手は少なくとも 4 手あることから，ある意味で隅への打ち手が最強である．」
（M・D デービス著「ゲーム理論入門」講談社）

A		
○	C	D
B		

A		C
	○	
B		D

先手の第 1 手に対し後手は A，B，C，D のどこかに打てば引き分けに持ち込める．

そこで，【色】という要素を導入することにより，〈○×ゲーム〉をより公平なもの，より思考力を要するもの，より列ができやすいもの（列ができない場合の確率が〈○×ゲーム〉よりも小さくなるようにする）に改良した新しいゲームを考案した．これを〈色○×ゲーム〉と呼ぶことにする．
注：この名前は生徒が名付けたものである．

2. 〈色○×ゲーム〉の紹介

2 つのパターンの〈色○×ゲーム〉を紹介する．

〈色○×ゲーム〉（パターン 1）

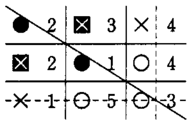
○には青○，青○，赤○，赤○，赤○があり
×には青×，青×，赤×，赤×　　　がある．
井型の中に 2 人で交互に○と×を入れていき，
『先に縦・横・斜めのどこかに
　○の列か青の列ができれば○の勝ち，
　×の列か赤の列ができれば×の勝ち』
とするゲームである．
ただし，双方とも列ができなかったり，同時に列ができた場合は【引き分け】とする．

〈色○×ゲーム〉(パターン２)

○には青○，青○，赤○，赤○，赤○があり
×には青×，青×，赤×，赤×　　　がある．
井型の中に２人で交互に○と×を入れる．
○，×すべて入れ終えたときに
『縦・横・斜めに
　　○側は○の列か青の列を
　　×側は×の列か赤の列を
相手より多く作った方を勝ち』とするゲームである．
ただし，双方とも列ができなかったり，列の総数が同じ場合は【引き分け】とする．

[(パターン２)の例]

右の図のようになった場合○側は先に斜めに列ができるが×側は赤の列が下段と右縦に２列できるから，最終的に２対１で×側の勝ちになる．



注：紙面の都合上，赤○を『○』，青○を『●』，赤×を『×』，青×を『☒』で表した．

① 〈色○×ゲーム〉は公平か？

(○か青の列ができる場合)
＝(○の列ができる場合)＋(青の列ができる場合)
　－(○と青の列がともにできる場合)
であり
(×か赤の列ができる場合)
＝(×の列ができる場合)＋(赤の列ができる場合)
　－(×と赤の列がともにできる場合)
であるから，○側と×側双方とも列ができる確率は同じになり，〈○×ゲーム〉における×側の不利さは是正できる．ただし，確率上は同じであるが，１手目に○側が自分の「好きな色」を，「好きな場所」に打てるわけであるから，その点で○側が有利なことに変わりはない．

② 〈色○×ゲーム〉は思考力を要するか？

生徒82名に〈○×ゲーム〉と〈色○×ゲーム〉を(パターン１)と(パターン２)でやってもらい，【３つを比較したときに一番頭を使う(考える)ゲームはどれですか】と質問したところ，以下の結果であった．

〈色○×ゲーム〉(パターン２)……56名
〈色○×ゲーム〉(パターン１)……23名
〈○×ゲーム〉　　　　　　　……３名

〈色○×ゲーム〉に慣れていないということもあるが，〈○×ゲーム〉よりも頭を使っていたようである．授業後の生徒の感想からもそのあたりの様子が読み取れる．

(生徒の感想)
- 難しかった．普通の○×ゲームは勝てる方法を知っているが，色○×ゲームは勝てる方法がわからない……．
- 面白かった．頭を使うし，普通の○×よりも勝つ数が多かった．今度からはこれで遊ぼうと思う．
- とても新鮮な○×ゲームであり，頭を働かせるのにとても良く作られていた．
- いろいろ考えられて勝つパターンが増えるのでとても面白かった．
- 楽しかった．普通の○×ゲームはほとんど決着がつかないけど，色○×ゲームは○×と色に注意しなくてはいけないから楽しい．

ちなみに，【３つを比較したときに一番面白いゲームはどれですか】と質問したところ，以下の結果であった．

〈色○×ゲーム〉(パターン２)……34名
〈色○×ゲーム〉(パターン１)……35名
〈○×ゲーム〉　　　　　　　……13名

普段，机の表面と仲の良い(？)生徒も〈色○×ゲーム〉を嬉々としてやっていたのがとても印象的であった．

③ 〈色○×ゲーム〉は列ができやすいか？

双方とも列ができない場合の確率を考える．
機械的に○と×を交互に入れた時，○と×双方とも列ができないのは前にあげた①～⑯．この①～⑯の中で，赤と青ともに列ができない場合を次に考える．
①～④，⑤～⑧，⑨～⑫，⑬～⑯はそれぞれ同型であるから，①，⑤，⑨，⑬の４つの型について調べればよいことになる．

〈①の型で，赤と青ともに列ができない場合〉

●	☒	○
○	×	●
☒	○	×

●	×	○
○	☒	●
☒	○	×

○	×	●
●	☒	○
×	○	☒

○	☒	●
●	×	○
×	○	☒

〈⑤の型で，赤と青ともに列ができない場合〉

●	☒	○
×	○	●
☒	○	×

○	×	●
☒	●	○
×	○	☒

○	☒	○
×	●	●
☒	○	×

○	×	●
☒	○	○
×	●	☒

〈⑨の型で，赤と青ともに列ができない場合〉

●	×	○
○	●	☒
☒	○	×

●	×	○
○	○	☒
☒	●	×

○	☒	○
●	●	×
×	○	☒

○	☒	●
●	○	×
×	○	☒

〈⑬の型で，赤と青ともに列ができない場合〉

●	×	○
○	×	☒
☒	●	○

●	×	○
○	☒	☒
×	●	○

○	☒	○
●	☒	×
×	○	●

○	☒	○
●	×	×
☒	○	●

よって，○側と×側双方とも列ができない確率は

$$\frac{16\times4}{{}_9C_5\cdot{}_5C_3\cdot{}_4C_2}\fallingdotseq0.0084656$$

〈○×ゲーム〉の場合，双方とも列ができない確率は約 0.126984 であるから，〈色○×ゲーム〉の方が列ができやすいようである．実際に，生徒に（パターン１）を 581 回，（パターン２）を 426 回やってもらったところ，以下の結果であった．

（パターン１）では

○の勝ち……280 回，×の勝ち……203 回

引き分け…… 98 回

（パターン２）では

○の勝ち……141 回，×の勝ち……130 回

引き分け……155 回

〈色○×ゲーム〉の要領がつかめないということもあるが，〈○×ゲーム〉より勝負の決着がついていたようである．

おわりに

授業では，ゲームを楽しんだ後に，以下のような質問を生徒に考えさせる形で授業を展開した．

質問１

○側が勝つためには１手目に

①何色の○を

②どの場所に

打つのが良いと思いますか．

質問２

３手目までが右の図のようになったとき，×側が勝つためには４手目を

①何色の×を

②どの場所に

打つのが良いと思いますか．

赤 ○		
	赤 ×	
		青 ○

先生方の創意工夫により，このゲームを利用した面白い授業展開が考えられるのではないでしょうか．

なお，このゲームを理解していただくために，このゲームのホームページを下記のアドレスで公開しています．

［URL］http://www5a.biglobe.ne.jp/~yuikawa/game

ぜひ一度アクセスして下さい．

〈参　考　文　献〉

「ゲームの理論入門」モートン・D・デービス著（講談社ブルーバックス）

（埼玉県立志木高等学校）