直線 l の周りの回転体の体積

――1つの問題提起――

小原(おはら) 實晃(じっこう)

0. はじめに

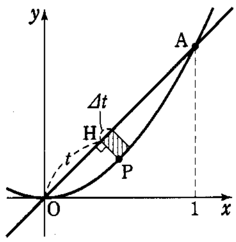
古いテーマで申し訳ありませんが，私としてはまだ解決していないと思っておりますので，問題提起をさせていただきます．

「直線 l の周りの回転体の体積」についての授業で，教科書(「発展」のところ)に書かれていたやり方を指導し，それをもう少し一般化して「公式を作ろう」としたときのことでした．数学好きのＴ君が，教科書の方法と全く異なるやり方で，より簡単な「公式」を作ってしまったのです．結果的には〝正しい〟公式なのですが，その導き方に疑問があり，少なくとも他の生徒には納得できないものであったのです．

1. 教科書のやり方，その公式化

まず，教科書のやり方を紹介しておく．

(問題 1) 放物線 $y=x^2$ と直線 $y=x$ で囲まれる図形を，直線 $y=x$ の周りに回転させてできる回転体の体積Vを求めよ．



〔解〕 直線 $y=x$ 上の点Hを通り，その直線に垂直な平面による回転体の切り口の面積を $S(t)$ とする．ただし $\mathrm{OH}=t$ とする．

上記の平面と曲線 $y=x^2$ との交点を $\mathrm{P}(x,\ x^2)$ とすると，

$$S(t)=\pi\cdot\mathrm{PH}^2=\pi\left(\frac{x-x^2}{\sqrt{2}}\right)^2,\quad t=\frac{x+x^2}{\sqrt{2}}$$

である．したがって，

$$V=\int_0^{\sqrt{2}}S(t)\,dt=\int_0^1 S(t)\frac{dt}{dx}dx$$

$$=\pi\int_0^1\frac{(x-x^2)^2}{2}\cdot\frac{1+2x}{\sqrt{2}}dx$$

$$=\frac{\pi}{2\sqrt{2}}\int_0^1(x^2-3x^4+2x^5)\,dx$$

$$=\frac{\sqrt{2}\,\pi}{60}$$

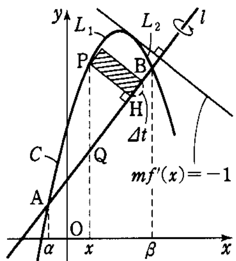
である． ■

もう少し一般化して「公式を作ろう」ということで，次の問題を提示した．

(問題 2) 曲線 $C:y=f(x)$ と直線

$$l:y=mx+n\ (m\neq 0)$$

で囲まれる図形(下の図のようになったとする)を，直線 l の周りに回転させてできる回転体の体積Vを表す公式を作れ．



〔解〕 直線 l 上の点Hを通り，その直線に垂直である平面による回転体の切り口の面積を $S(t)$ とする．ただし $\mathrm{AH}=t$ とする．(また，$\mathrm{AB}=T$ とする．)

上記の平面と曲線 $y=f(x)$ との交点を $\mathrm{P}(x,\ f(x))$ とすると

$$S(t)=\pi\left(\frac{|mx-f(x)+n|}{\sqrt{m^2+(-1)^2}}\right)^2,$$

$$t=(x-\alpha)\sqrt{1+m^2}+\frac{m(f(x)-(mx+n))}{\sqrt{1+m^2}}\quad\cdots\cdots ①$$

である．そして

$$\begin{array}{c||c} t & 0\longrightarrow T \\ \hline x & \alpha\longrightarrow\beta \end{array},\quad \frac{dt}{dx}=\frac{1+mf'(x)}{\sqrt{1+m^2}}$$

であるから，

$$V=\int_0^T S(t)\,dt=\int_\alpha^\beta S(t)\frac{dt}{dx}dx$$

$$=\frac{\pi}{(1+m^2)^{\frac{3}{2}}}\int_\alpha^\beta(mx+n-f(x))^2(1+mf'(x))\,dx$$

$$\cdots\cdots ②$$

である． ■

ところで，図の $mf'(x)=-1$ となる点の前後(曲線の L_1 部分と L_2 部分)で，場合分けが必要ではないのか．(生徒の質問)

考えてみよう．$mf'(\gamma)=-1$ とする．

$$x<\gamma \text{ では } \frac{dt}{dx}>0$$

$$x>\gamma \text{ では } \frac{dt}{dx}<0$$

であるから

$$V=\int_\alpha^\gamma S(t)\frac{dt}{dx}dx-\underbrace{\int_\gamma^\beta S(t)\left(-\frac{dt}{dx}\right)dx}_{\text{えぐりとる}}$$

$$=\int_\alpha^\beta S(t)\frac{dt}{dx}dx$$

となり，上で導いた公式は，場合分けの心配がないものと言える．

さて，T君は，①の代わりに，

$$t=(x-\alpha)\sqrt{1+m^2} \qquad \cdots\cdots ①'$$

を用いて

$$\begin{array}{c|c} t & 0 \longrightarrow T \\ \hline x & \alpha \longrightarrow \beta \end{array}, \quad \frac{dt}{dx}=\sqrt{1+m^2}$$

であるから

$$V=\frac{\pi}{\sqrt{1+m^2}}\int_\alpha^\beta (mx+n-f(x))^2dx \qquad \cdots\cdots ②'$$

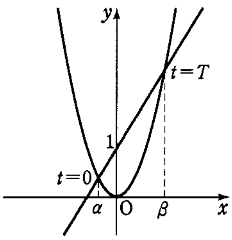
である，としたのである．

これは簡単な〝公式〟だ！

ただし，常に $\dfrac{dt}{dx}>0$ だから，この公式では，L_1 部分と L_2 部分で場合分けが必要である．が，とにかく②′を用いてみよう．

(問題 3) 放物線 $y=2x^2$ と直線 $y=2x+1$ で囲まれる図形を，直線 $y=2x+1$ の周りに回転させてできる回転体の体積 V を求めよ．

〔解〕②′を用いる．



α，β は

$$2x^2-2x-1=0$$

より

$$(\alpha-\beta)^2=3$$

を満たす．

$$V=\frac{\pi}{\sqrt{5}}\int_\alpha^\beta (2x^2-2x-1)^2dx$$

$$=\frac{\pi}{\sqrt{5}}\int_\alpha^\beta \{2(x-\alpha)(x-\beta)\}^2dx$$

$$=\frac{4\pi}{\sqrt{5}}\int_\alpha^\beta (x-\alpha)^2\{(x-\alpha)-(\beta-\alpha)\}^2dx$$

$$=\frac{4\pi}{\sqrt{5}}\int_\alpha^\beta \{(x-\alpha)^4-2(\beta-\alpha)(x-\alpha)^3+(\beta-\alpha)^2(x-\alpha)^2\}dx$$

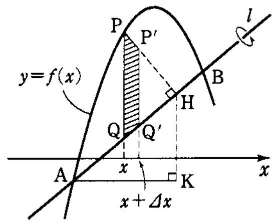
$$=\frac{4\pi}{\sqrt{5}}\cdot\frac{(\beta-\alpha)^5}{30}=\frac{6\sqrt{15}}{25}\pi$$ ■

②を用いても同じ結果が得られる．

実は，②′は〝正しい〟公式なのである！

①′を用いるT君のやり方は納得できない，という生徒のために，次のような証明を考えた．

2. 公式②′の導出



図の斜線部分を l の周りに回転した立体の体積 ΔV は

$$\Delta V=\frac{\pi}{3}(\mathrm{PH}^2\cdot\mathrm{QH}-\mathrm{P'H}^2\cdot\mathrm{Q'H}) \qquad \cdots\cdots ③$$

である．また，$\triangle\mathrm{AKH}\backsim\triangle\mathrm{PHQ}$ より

$$\mathrm{PH}=\frac{1}{\sqrt{1+m^2}}\mathrm{PQ},\quad \mathrm{QH}=\frac{m}{\sqrt{1+m^2}}\mathrm{PQ}$$

であり

$$\mathrm{P'H}=\mathrm{PH}-\frac{\sqrt{1+m^2}}{m}\Delta x,$$

$$\mathrm{Q'H}=\mathrm{QH}-\sqrt{1+m^2}\Delta x$$

であるから，③に代入して $(\Delta x)^2\fallingdotseq 0$，$(\Delta x)^3\fallingdotseq 0$ とおくと

$$\Delta V\fallingdotseq\frac{\pi}{3}\mathrm{PH}\left(\frac{2\sqrt{1+m^2}}{m}\mathrm{QH}+\sqrt{1+m^2}\mathrm{PH}\right)\Delta x$$

$$=\frac{\pi}{3}\mathrm{PH}(2\mathrm{PQ}+\mathrm{PQ})\Delta x$$

$$=\pi\mathrm{PH}\cdot\mathrm{PQ}\Delta x$$

$$=\frac{\pi}{\sqrt{1+m^2}}\mathrm{PQ}^2\Delta x$$

$$=\frac{\pi}{\sqrt{1+m^2}}\{f(x)-(mx+n)\}^2\Delta x \qquad \cdots\cdots ④$$

となる．

よって，求める体積Vは

$$V=\lim_{\Delta x\to 0}\sum \Delta V$$

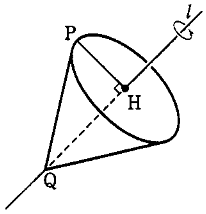
$$=\frac{\pi}{\sqrt{1+m^2}}\int_\alpha^\beta\{f(x)-(mx+n)\}^2dx \quad \cdots\cdots ⑤$$

である．

これは，②′に他ならない．

〔注〕ア．図の微小部分ΔVのつくり方からわかるように，$mf'(x)=-1$ となる点の前後での場合分けは必要ない．

イ．～～～の部分は，右図のような円錐の側面積に相当している．



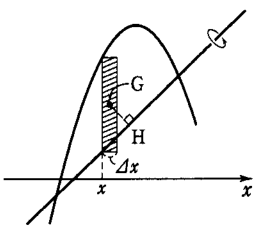
$$\because)\ \pi\mathrm{PQ}^2\times\frac{2\pi\mathrm{PH}}{2\pi\mathrm{PQ}}$$

$$=\pi\mathrm{PH}\cdot\mathrm{PQ}$$

ウ．$(\Delta x)^2\fallingdotseq 0$, $(\Delta x)^3\fallingdotseq 0$ とおいたところは，生徒にとって，はじめはかなり抵抗感のある部分かも知れない．しかし，これは〝微分のこころ〟ともいうべきことで，こういう〝感覚〟は身につけさせたいことである(Δx, ΔV に比べて$(\Delta x)^2$, $(\Delta x)^3$ は**高位の無限小**であると言われる)．

エ．何かの参考書で，次のように「パップス・ギュルダンの定理」を用いているのを見た．

図のような微小な短冊を考え，これを回転させた体積ΔVを求めると



$$\mathrm{GH}=\frac{1}{2}\{f(x)-(mx+n)\}\frac{1}{\sqrt{1+m^2}}$$

であるから，パップス・ギュルダンの定理により

$$\Delta V=\{f(x)-(mx+n)\}\Delta x\times 2\pi\mathrm{GH}$$

$$=\frac{\pi}{\sqrt{1+m^2}}\{f(x)-(mx+n)\}^2\Delta x$$

である．

いきなり④が得られる！

しかし，パップス・ギュルダンの定理の要件には，図形(この場合は短冊)と回転軸が共有点をもたない，ということがある．したがって，このような用い方は誤りである．

うまく④が出たのは，前ページで$(\Delta x)^2\fallingdotseq 0$, $(\Delta x)^3\fallingdotseq 0$ とおいたのと同じことが，この〝誤った〟用い方のうらに潜んでいるからである．

3．問題提起

T君が用いた①′は，AHではなくAQを，AQ$=t$ とおいて，xとtの変換を表したものである．

AH$=t$ とおいた①では，一連の

$$\Delta V=S(t)\Delta t,\quad t=\varphi(x)$$

$$V=\int_0^T S(t)dt=\int_\alpha^\beta S(t)\frac{dt}{dx}dx$$

が〝合理的〟に感じられるのに対し，T君の①′の方は，結果的には〝正しい〟のに〝合理的〟でないように感じられる．

しかも，常に $\dfrac{dt}{dx}>0$ だから $mf'(x)=-1$ となる点の前後での場合分けが必要なはずなのに，場合分けが必要でない公式⑤が得られる．

①′は単なる〝勘違い〟であり，公式②′を発見したのは「怪我の功名」にすぎなかったのだろうか．

生徒に，納得できる説明をしてやりたい．

'98. 11. 15

(高知・歩　塾)