第10回　日本数学コンクール

伊藤　正之

1. 日本数学コンクールの取組
—何が豊かな発想を生むか—

昨年も6月の声を聞くとともに，日本数学コンクールの問い合わせが殺到するようになった．私たちは，「日本数学コンクール」が第10回を迎え，名古屋大学の行事としてすっかり定着した証拠であり，感慨を持ってこれを迎えた．それは，高校生の皆さんが功利的に考えたり，物珍しさに引かれたりするものではなく，この10年間，私たちが真剣に日本数学コンクールに取り組んだ成果と確信するからである．日本数学コンクールでは，参加者1人1人の自由な発想を最も重く見て，自ら考えたことで，自然に感動を呼び起こして欲しいという取り組みを行っている．

いろいろな地でいろいろな種類のコンクールが行われているが，その多くが試すものであったり，一段高い所から見ようとするものであったりしないであろうか．少なくとも参加者と主催者が同じ目線で行うコンクールは，皆無であると思う．いろいろな種類の入学試験は，コンクールという言葉は使っていないが，試そうとしたり，一段高い所から見ようとするものの典型である．このようなところから，若者が自由な発想をし，それから知的な感動を覚えることができるであろうか．本来最も知的な感動を享受して欲しい若者，特に，高校生では，多くの皆さんが大学受験の準備に追われているのが現実であろう．といって，入学試験がすべて悪だと言うつもりもないし，受験勉強が無意味だと言うつもりもない．ただ，それだけに終始させてしまっていいかということである．ここで，私たちが日本数学コンクールで取り組んできたことを次の3点にまとめてみたい．

第一に，私たちが試したり，高い所から見ようとする意識を捨て去ることである．問題の作成に当たって，私たち自身が真剣に考えたり，議論したり，実験したりすることは当然であるが，コンクール参加者と私たちとの目線に距離をおかないため，身近で見聞きできる話題から出発し，参加者がその問題を通じて何かを発見する中で，その底にある，またはあるであろう数学理論に近づくことを期待している．これは，数学理論から問題を考えることへの1つの反省であり，ここでの新鮮な発見こそは，問題を作成した私たちがコンクール参加者より優れているなどと決して言えないのである．私たちは，しばしば若者の私たちでは考えつかない発想に出会うのである．

第二に，コンクール参加者が身近な話題を本当に身近なものと実感でき，その中で，全参加者が小さくとも何か発見があるように努めていることである．ハッとする発見が若い感性を刺激して，その底にあるものを見つけたいとの欲求に駆られるに違いないと考えるからである．具体的には，コンクール会場に小道具や実験器具を置き，小道具に自由に触ったり，簡単な実験ができるようにしていることである．

第三に，若者の感性は素晴しい．若者は，興味を持てば，数学には成りえないと思われるものでも，数学として処理しようとする勇気を持っている．私たちはこれを固く信じている．数学が強い汎科学性を持っているにもかかわらず，とかく私たちは，数学として処理する対象を限定しがちである．しかし，限定した中からは，自由な発想や考え空想する喜びは限定されたものになるに違いないと思う．これまでも，一見どこが数学かと思われる数多くの問題が出されたが，大人ではとても思いつかない直感と数学的または論理的な思考がしばしば見られた．本年度の日本数学コンクールにおいても，このコンセプトを堅持して，このコンセプトに基づく問題から専門家をも驚かす発想が出てきたのである．

2. 第10回日本数学コンクールの取組と問題

さる平成11年8月10日，高校生の皆さんが自分の持つ可能性を求めて，第10回日本数学コンクールに参集した．主催者は，当日が愛知県内の多くの高等学校で登校日に当たっていたことに気付かず，参加者数は例年と比べていくらか減少していたが，参加者の熱気はこれまでに勝るものがあった．

名古屋大学共通教育棟をコンクール会場とし，会場へは，松尾稔名古屋大学総長が参加者の激励に訪れるなど，名古屋大学をあげての支援を主催者一同改めて実感した．また，参加者がリラックスした中で問題に取り組めるように，会場からの出入りを自由にし，冷たい飲み物を用意するなど，会場作り，教室の雰囲気作りにも苦心した．ただ，このような取組は，このコンクールが名古屋大学の教官と愛知県，三重県，岐阜県の高校教師との連携によって実施されていることからできるものであり，このコンクールは大学の教師と高校の教師との連携のあり方を示しているようにも思う．さて，当日出された問題とコンクール後の採点および評価について，その感想を述べたいと思う．

第1問は，平行して行われた中学生以下を対象とする日本ジュニア数学コンクールとの共通問題であり，私どもの恩師である名古屋大学名誉教授の１先生からの手紙がヒントになったものである．その手紙には，先生の小学生時代の思い出のひとこまとして，当時，日本中の小学校で教えられていた東郷平八郎元帥の言葉「一発必中の砲一門は，よく百発一中の砲百門に匹敵す」に納得できずに，とうとう「いじめられ子」になってしまった云々と記されていた(このようなエピソードは，後になって日本中あちこちにあったと知り，色々な意味で，驚かされるものがあった．さらに，98年のある大学の入試問題にこの題材が使われていたことを知り，もう一度びっくりさせられた)．この問題では，東郷元帥の言葉は，どのような設定をしても正当化できないか，いろいろな場面を与えて考えさせたのである．もちろん，各場面ごとに，数学としては確率として把握できる対象であり，高校生の多くの皆さんがその捉え方をしていたが，目につくアイデアは特に出てこなかった．アイデアとしては，中学生の答案に面白いものがあった．

第2問は，月食から，地球は球だと考えた古代ギリシャ人のエピソードから出発して，影から実物を判断できるかという問題である．２つの凸多角形を同一の平面上に置いて，その平面に沿った直行光線を当てて，影＝線分の長さを計れる装置を会場ごとに配置した．凸多角形の場合について，平面に沿うあらゆる角度からの直行光線による影の長さから，実物が決まることを論理的考察のみから論証した答案，一部実験結果を加えた直感的発想が含まれてはいるものの，面白いアイデアが見られた答案，複素関数を使って調べようと試みた答案等があって，興味深いものであった．３次元空間における凸体について，同様な問いをしたが，これについては，興味深い論述はほとんど出てこなかった．なお，この問題を通じて，装置を置くことの重要さを改めて思い知らされた．

第3問は，日本数学コンクールのコンセプトとして大切にしている前節の第三で述べた「創造への勇気」に関わる問題である．私たちが物事を「認識する」ということは，どのようなメカニズムになっているだろうか，その考察を通じて何か数学のひとこまが見られるだろうか，を問いかけた問題である．このような問題に対する発想は，私たち数学者にとっても，容易なものでなく，強いて挙げれば，最後の問いにある「自己の認識」について論理的説明ができるかな，と思われた程度であった．また，この問題にある数多くの問いの間の関連性すら，専門家の説明なしには，理解できないものであった．しかし，今回もまた，若者の感性の素晴しさを思い知らされたのである．私たちが整理できていなかった問い間の関連性を明らかにするとともに，それぞれの問いに対して，しっかりとした論理構成で説明した２つの答案がでたのである．

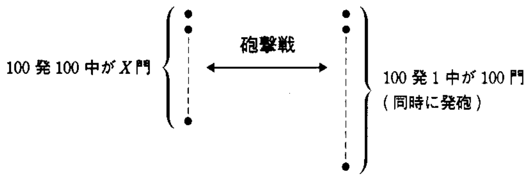
問題 1 （100 発 100 中は有利か）

あなたのひいおじいさんたちがまだ小学生だったころ，東郷平八郎という有名な将軍の言葉が日本中の学校で教えられていました．それは「100 発 100 中の大砲 1 門は，100 発 1 中の大砲 100 門に勝る．」というものです．

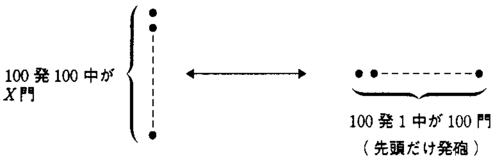
この言葉は例えば「仕事を雑にやってはいけない」という教えだと考えれば真実でしょう．しかし，当時の小学生の中にも素直でない子がいて，「そんなばかなことはない，100 発 100 中の大砲でも 10 門なければ，100 発 1 中の大砲 100 門にはかなわないはずだ」と反発し，皆から冷たい視線を浴びたようです（名古屋大学のある名誉教授の話）．

この問題を考えてみましょう．大砲は遠くから撃ちあうものですから，どんな対戦モード（対戦の形）でも命中率は一定で変わらないものとします．そこで，次の 2 通りの場合に 100 発 100 中側が何門のときは不利で，何門あれば有利になるか答えを出し，理由をつけて説明して下さい．

(1) 正々堂々

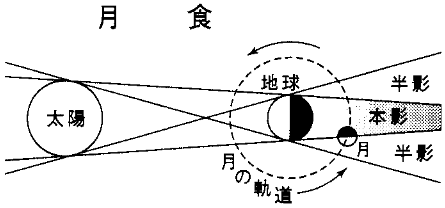


(2) T字作戦または一乗寺下り松の決闘



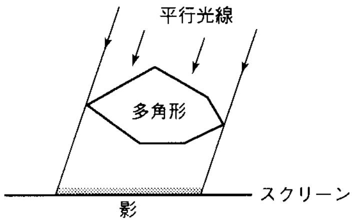
問題２（月　食）

昔の人々は月食で，月が刻々と欠けていき，また満ちてくるのを見て，地球は丸い球に違いないと考えたそうです．月食は図１のように地球の影が月に映ってできるということを知っていますね．このように，実物がわからなくても，そのもののいろいろな影から，その物がどんな形であるかを判断できそうに思われます．しかし，本当にそのように判断していいでしょうか．



〔図１〕

(1)　手始めに平面上で，平面に沿った光線によってできる影を考えてみることにしましょう．２つのどの角度も180度より小さい多角形（凸多角形）が同じもの（合同）であるかどうかをいろいろな影から判断する問題です．多角形であっても，それを平面に置いて，平面に沿った光線によって影を作れば，その影は線分になって実際には見えませんね．そこで，多角形を厚みのある板状のものにして平面に沿った平行光線で影が見えるようにしましょう．２つの多角形を同じ場所にいつも向きを変えずに置き，平面に沿った平行光線によってスクリーンに映し出される棒状の影の長さを測ることにしましょう（図２参照）．



〔図２〕

この２つの多角形が同じもの（合同）であるかどうかは，重ねてみれば，すぐにわかりますが，影の長さから判断できるに違いないと思って，実験を繰り返しました．いろいろな方向から平面に沿った平行光線をあてて，それぞれの多角形の影の長さを測ったところ常に等しい値でした．また，多角形の置き場所を中心としてスクリーンをいろいろ回転して，同じ実験をしましたところ，影の長さは，常に等しい値でした．このことから，２つの多角形は同じもの（合同）と言うことができるでしょうか．

(2)　肉眼では見えないのですが，空に静止している物体が浮かんでいて，太陽の動きに応じてその影が刻々と形を変えて地表に映っています．今，その影の図を何枚か入手しました．１枚が円で，他のものは全て楕円でした．誰かが「あの物体は球だ」と叫びました．さて，これだけの影から，このように断定していいのでしょうか．

さらに進んで，へこんでいない立体では，いろいろな影の形からその形を判断することができるのでしょうか．

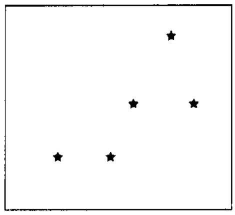
問題 3 （W 文字認識）

(1) 文字の認識について数学的に考えてみましょう.

大阪のなんばに行くと青黒っぽいかっこいい電車が目に入ります. その名もサザンクロス号つまり南十字星号といい, 人気列車の1つです.

夜空を見上げた人は昔からいろいろなことを考えました. 流れ星を見て願い事をしたり, ある時は方向を知るために北極星を探し, 星のパターンに物語をつけて語り継ぎながら, 記憶を共有して来ました. 日本人のこまやかな心情は天の川をはさんで1年に1度だけ再会を許される織姫と彦星のロマンスを作り上げました. あなた方の中には自分の星座の名前を知っている人もいますね. また, ギリシャ神話と関連した星座は皆, 北半球にあり, 南半球の星座は航海に関係があるなんて知っていますか. そこで星座にからめて, パターン認識や文字認識という人工知能に関する問題を考えてみましょう.

夜空に光る星を想像してください. 今, あなたは図1のようなパターンの星座（これはカシオペア座の一部, 白黒反転してある）を見ているとします. 2つの点があると, それらを結ぶ直線を引きたくなりますね. 星が2つあるとそれらをつなぐ線分が見えて来ますが, 神経回路と記憶および学習の効果であることが分かっています.



〔図1〕

そこで問題です. この5個の星々を結ぶ図形はいくつありますか. それぞれの特徴をあげてください. とくに, その中で, 際立って他と区別し易い特徴のものはどれでしょうか. それがカシオペアのWの文字の特徴となっていることと関連があるのですが, それを説明してください.

(2) では次にWの文字について考えてみましょう. この文字を他の文字と区別（識別）するためには他と違う特徴を持っていなければなりませんね. 一番間違えやすい字は何ですか. その理由を挙げてください.

(3) そこでいよいよ, 認識の問題です. このWという字をいくつかわざと違えて書いてみてください. そしてそれを客観的に眺めてください. 他の字に見えますか？ これらのパターンは決して同じに書かれてはいないのに, どうしてWとわかるのでしょうか.

そのように見える理由, つまりWだと判断した理由を書いてください.

(4) これからが数学的に考えてもらうための問題です.

もし, 記憶装置と判断装置があれば, 認識は可能でしょうか. 判断というのは, 比較することで選ぶという非常に重要なすべての数学の基礎になる考え方です.

(5) この考えを進めると, もし相手を認識出来たとすると, 鏡に写っている自分を認識出来ることになり, 結果として自己を認識できることが数学的に分かるのですが, これを自分の言葉で言い表しなさい.

（名古屋大学　情報文化学部）