$(a+b\sqrt{m})^n$ の展開式について

前田(まえだ)　淳一(じゅんいち)

1. はじめに

$(a+b\sqrt{m})^n$ の展開は，n の値が大きくなると計算が面倒になるし，二項定理を利用するにしても，$\sqrt{m}$ の始末が結構難しい．そこで，数列を利用して，これを求める方法を考えた．

これは，フィボナッチ数列

$$u_{n+2}=u_{n+1}+u_n,\ u_1=u_2=1$$

の一般項が，

$$u_n=\frac{1}{\sqrt{5}}\left\{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n-\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right\}$$

と表される．いま，

$$x_n+y_n\sqrt{5}=\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n$$

とおくと，

$$x_n-y_n\sqrt{5}=\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n$$

であるから，

$$u_n=\frac{1}{\sqrt{5}}\{(x_n+y_n\sqrt{5})-(x_n-y_n\sqrt{5})\}=2y_n$$

つまり，$\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n$ の展開式における $\sqrt{5}$ の係数が $\frac{u_n}{2}$ である．

このことにヒントをえて，一般の場合について調べてみた．

2. 隣接 3 項間の漸化式

一般に，隣接 3 項間の漸化式

$$u_{n+2}+au_{n+1}+bu_n=0 \tag{1}$$

が与えられたとき，これを次のように変形できたとする．

$$u_{n+2}-\alpha u_{n+1}=\beta(u_{n+1}-\alpha u_n) \tag{2}$$

これをあらためて整理し，

$$u_{n+2}-(\alpha+\beta)u_{n+1}+\alpha\beta u_n=0$$

これと，(1) 式とを比較して，

$$\alpha+\beta=-a$$
$$\alpha\beta=b$$

より，α，β は 2 次方程式

$$t^2+at+b=0 \tag{3}$$

の解である．この 2 次方程式を (1) 式の**特性方程式**という．

さて，(2) 式は数列 $\{u_{n+1}-\alpha u_n\}$ が，初項 $u_2-\alpha u_1$，公比 β の等比数列であることを示しているから，

$$u_{n+1}-\alpha u_n=(u_2-\alpha u_1)\beta^{n-1} \tag{4}$$

であり，同様に

$$u_{n+1}-\beta u_n=(u_2-\beta u_1)\alpha^{n-1} \tag{5}$$

だから，これらを辺々引いて，

$$(\beta-\alpha)u_n=(u_2-\alpha u_1)\beta^{n-1}-(u_2-\beta u_1)\alpha^{n-1}$$

よって，

$$u_n=\frac{1}{\beta-\alpha}\{(u_2-\alpha u_1)\beta^{n-1}-(u_2-\beta u_1)\alpha^{n-1}\}$$

として，一般項 $\{u_n\}$ が得られる．

これは，特性方程式 (3) が異なる 2 解を有する (虚数解でもよい) 場合である．

(3) の解が重解 $(\alpha=\beta)$ の場合，(4)，(5) は，

$$u_{n+1}-\alpha u_n=(u_2-\alpha u_1)\alpha^{n-1}$$

となり，両辺を α^{n+1} で割って，

$$\frac{u_{n+1}}{\alpha^{n+1}}-\frac{u_n}{\alpha^n}=\frac{u_2-\alpha u_1}{\alpha^2}=(\text{定数})$$

よって，数列 $\left\{\frac{u_n}{\alpha^n}\right\}$ が等差数列であることから，一般項が求まる．

3. 展開式の係数の満たす漸化式

$$(a+b\sqrt{m})^n=x_n+y_n\sqrt{m}$$

とおくとき，数列 $\{x_n\}$，$\{y_n\}$ はどのような漸化式を満たすか？

ここで，a，$b\in\mathbb{Q}$ (有理数)，m は平方因子を含まない整数とする (負の整数でもよい)．

$$x_n+y_n\sqrt{m}=(x_{n-1}+y_{n-1}\sqrt{m})(a+b\sqrt{m})$$
$$=(ax_{n-1}+bmy_{n-1})+(bx_{n-1}+ay_{n-1})\sqrt{m}$$

より，

$$x_n=ax_{n-1}+bmy_{n-1} \tag{6}$$

$$y_n = bx_{n-1} + ay_{n-1} \tag{7}$$

(7) 式より，$x_{n-1} = \dfrac{y_n - ay_{n-1}}{b}$ であるから，(6) 式に代入して，

$$\frac{y_{n+1} - ay_n}{b} = a \cdot \frac{y_n - ay_{n-1}}{b} + bmy_{n-1}$$

これを整理して，

$$y_{n+1} - 2ay_n + (a^2 - b^2m)y_{n-1} = 0 \tag{8}$$

同様にして，

$$x_{n+1} - 2ax_n + (a^2 - b^2m)x_{n-1} = 0 \tag{9}$$

ここで，x_1，x_2，y_1，y_2 は

$$x_1 = a,\ y_1 = b,\ x_2 + y_2\sqrt{m} = (a + b\sqrt{m})^2$$

で定義する．

(8) 式，(9) 式で定義される漸化式の特性方程式は，

$$t^2 - 2at + (a^2 - b^2m) = 0$$

である．これは，$a + b\sqrt{m}$ を解とする実係数の 2 次方程式になっている．

定理 $(a + b\sqrt{m})^n = x_n + y_n\sqrt{m}$ において，数列 $\{x_n\}$，$\{y_n\}$ は，$a + b\sqrt{m}$ を解とする実係数 2 次方程式を特性方程式とする隣接 3 項間の漸化式を満たす．

4. いくつかの例

例 1 $(2+\sqrt{3})^n$ の展開

$$(2+\sqrt{3}) + (2-\sqrt{3}) = 4$$

$$(2+\sqrt{3})(2-\sqrt{3}) = 1$$

より，$2+\sqrt{3}$ を解とする 2 次方程式は

$$t^2 - 4t + 1 = 0$$

よって，

$$x_{n+2} = 4x_{n+1} - x_n$$

$$y_{n+2} = 4y_{n+1} - y_n$$

また，$x_1 = 2$，$y_1 = 1$，$x_2 + y_2\sqrt{3} = (2+\sqrt{3})^2 = 7 + 4\sqrt{3}$．これらの値を初期値とし，この漸化式に基づいて数列を再現すると，

n	1	2	3	4	5	6	7	8
x_n	2	7	26	97	362	1351	5042	18817
y_n	1	4	15	56	209	780	2911	10864

この表より，

$$(2+\sqrt{3})^3 = 26 + 15\sqrt{3}$$

$$(2+\sqrt{3})^4 = 97 + 56\sqrt{3}$$

$$(2+\sqrt{3})^5 = 362 + 209\sqrt{3}$$

$$(2+\sqrt{3})^6 = 1351 + 780\sqrt{3}$$

$$(2+\sqrt{3})^7 = 5042 + 2911\sqrt{3}$$

$$(2+\sqrt{3})^8 = 18817 + 10864\sqrt{3}$$

例 2 $(1+\sqrt{3}i)^n$ の展開

$$(1+\sqrt{3}i) + (1-\sqrt{3}i) = 2$$

$$(1+\sqrt{3}i)(1-\sqrt{3}i) = 4$$

より，$1+\sqrt{3}i$ を解とする 2 次方程式は

$$t^2 - 2t + 4 = 0$$

よって，

$$x_{n+2} = 2x_{n+1} - 4x_n$$

$$y_{n+2} = 2y_{n+1} - 4y_n$$

ここで，

$x_1 = y_1 = 1$，$x_2 + y_2\sqrt{3}i = (1+\sqrt{3}i)^2 = -2 + 2\sqrt{3}i$．これらの値を初期値とし，この漸化式に基づいて数列を再現すると，

n	1	2	3	4	5	6	7	8
x_n	1	−2	−8	−8	16	64	64	−128
y_n	1	2	0	−8	−16	0	64	128

この表より，

$$(1+\sqrt{3}i)^3 = -8$$

$$(1+\sqrt{3}i)^4 = -8 - 8\sqrt{3}i$$

$$(1+\sqrt{3}i)^5 = 16 - 16\sqrt{3}i$$

$$(1+\sqrt{3}i)^6 = 64$$

$$(1+\sqrt{3}i)^7 = 64 + 64\sqrt{3}i$$

$$(1+\sqrt{3}i)^8 = -128 + 128\sqrt{3}i$$

5. いくつかの例 (その 2)

さて，**定理**の応用として，次の問題を考えてみたい．

$a_1 = \sqrt{3}$，$a_2 = 2$，$a_{n+2} = 2\sqrt{3}a_{n+1} - 4a_n$ ($n = 1, 2, 3, \cdots\cdots$) で定められる数列 $\{a_n\}$ について，次の問いに答えよ．

(1) a_3 を求めよ．

(2) $a_n = 0$ となる n の値をすべて求めよ．

【解】 (1) は，初期条件を代入するだけでよい．($a_3 = 0$)

(2) に**定理**が適用できる．

与えられた漸化式の特性方程式は，

$$t^2 - 2\sqrt{3}t + 4 = 0$$

で，これを解いて，$t = \sqrt{3} \pm i$ であり，

$a_1=\mathrm{Re}(\sqrt{3}+i)=\sqrt{3}$，$(\sqrt{3}+i)^2=2+2\sqrt{3}\,i$ より，$a_2=\mathrm{Re}((\sqrt{3}+i)^2)=2$ であるから，数列 $\{a_n\}$ は，$(\sqrt{3}+i)^n$ の展開式における実数部分を表す．

$$\sqrt{3}+i=2\left(\cos\frac{\pi}{6}+i\sin\frac{\pi}{6}\right)$$

と極形式に表せるから，

$$(\sqrt{3}+i)^n=2^n\left(\cos\frac{\pi}{6}n+i\sin\frac{\pi}{6}n\right)$$

よって，$a_n=0 \Longleftrightarrow \frac{\pi}{6}n=\frac{\pi}{2}+k\pi$ の形．

よって，$n=3+6k$ $(k=0,\ 1,\ 2,\ 3,\ \cdots\cdots)$

6. 終わりに

この結果は，はじめにも書いたように，「フィボナッチ数列

$$1,\ 1,\ \underline{2},\ \underline{3},\ \underline{5},\ 8,\ \underline{13},\ 21,\ 34,\ 55,\ \underline{89}\cdots\cdots$$

において，素数は無限に現れるか」という問題を考えているときに得られた（アンダーラインを引いた項が素数）．

この問題を一般項から考えられないかと思い，いろいろ調べているうちに偶然得られたものである．

隣接3項間の漸化式よりも，連立型の漸化式（(6)(7)式）の方が扱いやすいかもしれないが，以上述べたような動機であるので，あえて隣接3項間の漸化式にした．

（広島県立広島観音高等学校）