三角関数の微分法について

宮川（みやかわ） 幸隆（ゆきたか）

三角関数の微分法は

$$(\sin x)' = \cos x \tag{1}$$

に集約される．実際，(1)が示されれば，

$$(\cos x)' = \left(\sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right)\right)'$$
$$= \left\{\cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right)\right\}\left(\frac{\pi}{2} - x\right)'$$

［∵合成関数の微分法］

$$= -\sin x,$$

$$(\tan x)' = \left(\frac{\sin x}{\cos x}\right)'$$
$$= \frac{(\sin x)'\cos x - (\cos x)'\sin x}{\cos^2 x}$$

［∵商の微分法］

$$= \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x}$$

等となって，他の三角関数の微分法が確立されるからである．

このように，三角関数の中では sin が一番違い，その本当の理由は，関数 $y=\sin x$ は **Abel 積分**

$$x = \int_0^y \frac{dy}{\sqrt{1-y^2}} \quad (-1 \leqq y \leqq 1)$$

の逆関数であるという一点に存在する．斯様に，**関数 sin は物理的な関数などでは決してなく，極めて数学的な関数なのである．**

本稿の目標は(1)を厳密に証明することである．

普通，高校数学は

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1 \tag{2}$$

を基礎において(1)を示すが，周知のごとく，この議論は循環論法に陥っている．実は，(2)を用いて(1)を証明するのではなく，その逆，すなわち(1)を用いて(2)を示すのが本筋である．この点についても後に言及したいと思う．

さて，まず，点 x_0 $\left(-\dfrac{\pi}{2} \leqq x_0 \leqq \dfrac{\pi}{2}\right)$ において

$$\left[\frac{d}{dx}\sin x\right]_{x=x_0} = \sqrt{1-\sin^2 x_0} = \cos x_0 \tag{3}$$

であることを示そう．ここに例えば $x=\dfrac{\pi}{2}$ のときは，(3)は

$$\lim_{h\to -0} \frac{\sin\left(\frac{\pi}{2}+h\right) - \sin\frac{\pi}{2}}{h} = \sqrt{1-\sin^2\frac{\pi}{2}}$$

を意味する．すなわち，$\sin x$ は $x=\dfrac{\pi}{2}$ で**左側微分可能**であり，$\left[\left(\dfrac{d}{dx}\right)^{-}\sin x\right]_{x=\frac{\pi}{2}} = \sqrt{1-\sin^2\dfrac{\pi}{2}}$

となることを意味する．

実際，$\varepsilon(>0)$ を十分小とするとき，$\dfrac{1}{\sqrt{1-y^2}}$ は

閉区間 $-1+\varepsilon \leqq y \leqq 1-\varepsilon$

で積分可能であるから，**積分関数**

$$\int_0^y \frac{dy}{\sqrt{1-y^2}} \tag{4}$$

は閉区間 $-1<y<1$ で**微分可能**で，

$$\frac{d}{dy}\int_0^y \frac{dy}{\sqrt{1-y^2}} = \frac{1}{\sqrt{1-y^2}}$$

である．よって，積分関数(4)は $y=\sin x_0$ $\left(-\dfrac{\pi}{2}<x_0<\dfrac{\pi}{2}\right)$ で微分可能であり，

$$\left[\frac{d}{dy}\int_0^y \frac{dy}{\sqrt{1-y^2}}\right]_{y=\sin x_0} = \frac{1}{\sqrt{1-\sin^2 x_0}} \neq 0$$

であるから，**逆関数の微分法**により，

$$\left.\begin{aligned} &\left[\frac{d}{dx}\sin x\right]_{x=x_0} = \sqrt{1-\sin^2 x_0} \\ &\qquad \left(-\frac{\pi}{2}<x_0<\frac{\pi}{2}\right). \end{aligned}\right\} \tag{5}$$

更に，区間 $-1 \leqq y \leqq 1$ で $\dfrac{1}{\sqrt{1-y^2}}$ は**広義積分可能**であるから，**積分関数**(4)は閉区間 $-1 \leqq y \leqq 1$ において**連続**であり，$y=\sin x$ は閉区間

$$-\frac{\pi}{2} \leqq x \leqq \frac{\pi}{2}$$

で連続となる［∵**逆関数の連続性**］.

また，(5)により $y=\sin x$ は開区間

$$-\frac{\pi}{2}<x<\frac{\pi}{2}$$

で微分可能であるから，$h(>0)$ を十分小とすると，**平均値の定理**によって，例えば

$$\sin\left(\frac{\pi}{2}-h\right)-\sin\frac{\pi}{2}=-h\left[\frac{d}{dx}\sin x\right]_{x=\frac{\pi}{2}-\theta h},$$

$$0<\theta<1.$$

$$\therefore\quad \lim_{-h\to-0}\frac{\sin\left(\frac{\pi}{2}-h\right)-\sin\frac{\pi}{2}}{-h}$$

$$=\lim_{h\to+0}\left[\frac{d}{dx}\sin x\right]_{x=\frac{\pi}{2}-\theta h}$$

$$=\lim_{h\to+0}\sqrt{1-\sin^2\left(\frac{\pi}{2}-\theta h\right)}\quad[\because(5)]$$

$$\therefore\quad \left[\left(\frac{d}{dx}\right)^{-}\sin x\right]_{x=\frac{\pi}{2}}=\sqrt{1-\sin^2\frac{\pi}{2}}\qquad(6)$$

以上によって(3)は示された.

次に，例えば $\frac{\pi}{2}\leqq x_0\leqq\frac{3\pi}{2}$ とすると，

$$-\frac{\pi}{2}\leqq x_0-\pi\leqq\frac{\pi}{2}$$

であり，(3)から

$$\left[\frac{d}{dx}\sin x\right]_{x=x_0-\pi}=\cos(x_0-\pi)=-\cos x_0.$$

しかるに，$\frac{\pi}{2}<x_0<\frac{3\pi}{2}$ のときは，

$$\left[\frac{d}{dx}\sin x\right]_{x=x_0-\pi}$$

$$=\lim_{h\to0}\frac{\sin(x_0-\pi+h)-\sin(x_0-\pi)}{h}$$

$$=-\lim_{h\to0}\frac{\sin(x_0+h)-\sin x_0}{h}$$

$$=-\left[\frac{d}{dx}\sin x\right]_{x=x_0}$$

であるから，

$$\left[\frac{d}{dx}\sin x\right]_{x=x_0}=\cos x_0.$$

更に，例えば $x_0=\frac{\pi}{2}$ のときは

$$\left[\frac{d}{dx}\sin x\right]_{x=\frac{\pi}{2}-\pi}$$

$$=\lim_{h\to+0}\frac{\sin\left(\frac{\pi}{2}-\pi+h\right)-\sin\left(\frac{\pi}{2}-\pi\right)}{h}$$

$$=-\lim_{h\to+0}\frac{\sin\left(\frac{\pi}{2}+h\right)-\sin\frac{\pi}{2}}{h}$$

$$=-\left[\left(\frac{d}{dx}\right)^{+}\sin x\right]_{x=\frac{\pi}{2}}$$

であるから

$$\left[\left(\frac{d}{dx}\right)^{+}\sin x\right]_{x=\frac{\pi}{2}}=\cos\frac{\pi}{2}$$

となって，(6)とから

$$\left[\frac{d}{dx}\sin x\right]_{x=\frac{\pi}{2}}=\cos\frac{\pi}{2}$$

となるから，結局(1)が証明されたことになる.

以上で(1)を厳密に証明することが出来たが，このように，**高校数学の範囲内では(1)を厳密に導くことは所詮無理な相談である.**

高校数学で(1)を導くときに sin の加法定理を用いたが，加法定理は，複素積分

$$w=\int_0^z\frac{dz}{\sqrt{1-z^2}}\qquad(7)$$

の逆関数として定義された

$$z=\sin w$$

の正則性を証明する際に本質的であることを注意しておく．このことを厳密に示すためには，Riemann 面が必要となったり，複素積分(7)の逆関数として一価関数が定まることを証明して，その一価関数であるところの複素関数としての sin の加法定理を厳密に示す必要等があるが，加法定理

$$\sin(w_1+w_2)=\sin w_1\cos w_2+\cos w_1\sin w_2\qquad(8)$$

や

$$\cos(iv)=\frac{e^v+e^{-v}}{2}\qquad(9),$$

$$\sin(iv)=i\cdot\frac{e^v-e^{-v}}{2}\qquad(10)$$

を既知とすれば，次のように証明される：実際，(8)，(9)，(10)から

$$\sin(u+iv)=\sin u\cdot\frac{e^v+e^{-v}}{2}+i\cos u\cdot\frac{e^v-e^{-v}}{2}$$

そこで，

$$f(u,\ v)=\sin u\cdot\frac{e^v+e^{-v}}{2},$$

$$g(u,\ v)=\cos u\cdot\frac{e^v-e^{-v}}{2}\ \text{とおく．}$$

すると，

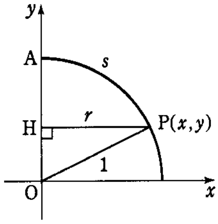
$$f_u(u,\ v)=\cos u\cdot\frac{e^v+e^{-v}}{2}=g_v(u,\ v),$$

$$f_v(u,\ v)=\sin u\cdot\frac{e^v-e^{-v}}{2}=-g_u(u,\ v)$$

であるから，$f(u,\ v)$，$g(u,\ v)$ は C^1 級であり，しかも**Cauchy-Riemann の関係式**を満たす．
従って，$\sin w=\sin(u+iv)$ は正則である．

最後に，前述した本筋であるところの(1)を用いた(2)の証明を述べて本稿を終えることにしよう：

第1象限における単位円周上の動点を$\mathrm{P}(x,\ y)$とし，右図のように，弧$\widehat{\mathrm{AP}}$の長さをs，垂線PHの長さをrとすると，



$$\left.\begin{array}{l} x=r,\\ y=\sqrt{1-r^2},\\ 0\leqq r<1\end{array}\right\}\qquad (11)$$

であって，$r=\varphi(r)$，$\sqrt{1-r^2}=\psi(r)$ とおくと，区間 $0\leqq r<1$ において $\varphi(r)$，$\psi(r)$ は C^1 級であり，しかも，その区間で常に，

$$\varphi'(r)^2+\psi'(r)^2=1+\left(\frac{-2r}{2\sqrt{1-r^2}}\right)^2=\frac{1}{1-r^2}\neq 0$$

であるから，曲線(11)は**滑らか**である．
よって，上図において

$$s=\int_0^r\sqrt{\varphi'(r)^2+\psi'(r)^2}\,dr=\int_0^r\frac{dr}{\sqrt{1-r^2}}$$

であり，

$$r=\sin s$$

と表され，これを(11)へ代入すると

$$x=\sin s,\quad y=\sqrt{1-\sin^2 s}\quad \left(0\leqq s<\frac{\pi}{2}\right)\qquad (12)$$

となり，これは曲線(11)に他ならない．

さて，(12)に対し

$\dfrac{dx}{ds}=\cos s\left(0\leqq s<\dfrac{\pi}{2}\right)$ が成り立ち［∵(1)］，

$$\frac{弦長}{弧長}=\frac{\Delta x}{\Delta s}=\frac{\sin\Delta s}{\Delta s}$$

であるから

$$\lim_{\Delta s\to+0}\frac{\sin\Delta s}{\Delta s}=\left[\frac{dx}{ds}\right]_{s=0}=1.$$

$\Delta s<0$ のときは

$$\lim_{\Delta s\to-0}\frac{\sin\Delta s}{\Delta s}=\lim_{-\Delta s\to+0}\frac{-\sin\Delta s}{-\Delta s}=\lim_{-\Delta s\to+0}\frac{\sin(-\Delta s)}{-\Delta s}=1$$

であるから，結局(2)が示された．

（静岡県立三島北高等学校）