正 17 角形の代数的解法 および幾何的解法

龍山(たつやま)　一郎(いちろう)

I　はじめに

定規とコンパスによって作図ができる正 n 角形で，正 3 角形，正方形，正 5 角形，正 6 角形はよく知られているが，この他に正 17 角形の作図ができる．

この 3，5，17 をフェルマー素数（一般に $2^{2^n}+1$ と書ける）といい，他に 257，65537 があり，これより大きい数 4294967297（$=641\times6700417$）は，オイラーによって括弧内のように因数分解され，素数でないことが証明されたのである．

一方，正 17 角形の作図については，1796年にガウスが，正 257 角形の作図については，1832年にリヒェートが発明したと聞いている．

ここでは，正 17 角形の代数的解法（方程式による解法）について，まず，2 等分，3 等分，5 等分等についての n 等分方程式を求め，そして，作図ができる正 n 角形と作図ができない正 n 角形の n 等分方程式（円分方程式）の解の違いを述べ，これらを参考にし，正 17 角形による 17 等分方程式の解を求める．

続いて，フェルマー数（100 以下）による正 n 角形の幾何的解法（作図による）を，正 3 角形，正方形，正 5 角形，正 17 角形の作図をもとにして，それぞれの正 n 角形の作図をしたいと思う．

II　代数的解法

1．角の 2 等分について

(1)　2 等分方程式

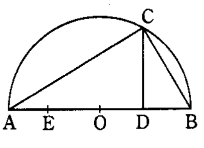
加法定理より，

$\cos2\theta=2\cos^2\theta-1$

ここで，$2\cos\theta=x$ とおくと

$x^2=2+2\cos2\theta$ より

$x=\pm\sqrt{2+2\cos2\theta}$



次に，右上図のように，$AE=2\cos2\theta$，$ED=2$，$DB=1$ をとり，AB の中点を O として，半径 OA の半円をかき，$AB\perp CD$ となる点 C を円周上にとり，2 つの 3 角形 ADC, BCD を作ると，2 つの 3 角形は，2 角がそれぞれ等しいから相似となる．

ゆえに，$AD:CD=CD:DB$ より $CD^2=AD\cdot DB$

ここで，$AD=2+2\cos2\theta$，$DB=1$ であり

$CD=x$ とおくと $x^2=2+2\cos2\theta$ となる．

この作図は，一般に可能であるので“任意の角の 2 等分の作図は，可能である”といえる．

◦円周の 2 等分について

$2\cos2\theta=2$ のとき（$2\theta=360^\circ$）

$$x^2-2-2=0$$

$\therefore$　$x^2=4$ より　$x=\pm2$

これより　$\theta=0^\circ$（または 360°），180°

(2)　4 等分方程式

$\cos4\theta=8\cos^4\theta-8\cos^2\theta+1$ で $2\cos\theta=x$ とおくと $x^4-4x^2+2-2\cos4\theta=0$ となる．

ここで $x^2=y$，$y-2=X$ とおくと

$X^2-2-2\cos4\theta=0$ は，2 等分方程式と同形である．

◦円周の 4 等分について　（円に内接する正方形）

$2\cos4\theta=2$ のとき $4\theta=360^\circ$（以下同じ省略する）

$$X^2-2-2=0$$

$\therefore$　$X^2=4$ より　$X=\pm2$

$X+2=y=x^2$ より　$x=\pm2$，0（重解）

これより　$\theta=0^\circ$，180°，90°，270°

(3)　8 等分方程式

$$\cos8\theta=2^7\cos^8\theta-8\times2^5\cos^6\theta+20\times2^3\cos^4\theta-16\times2\cos^2\theta+1$$

で，$2\cos\theta=x$ とおくと

$x^8-8x^6+20x^4-16x^2+2-2\cos8\theta=0$ となる．

ここで，$x^2=y$，$y-2=z$ とおくと

$$z^4-4z^2+2-2\cos8\theta=0$$

更に，$z^2=Z$，$Z-2=X$ とおく．

$X^2-2-2\cos8\theta=0$ は，2 等分方程式と同形である．

○円周の 8 等分について (円に内接する正 8 角形)

$X^2-2-2=0$

$\therefore$ $X^2=4$ より $X=\pm 2$

$X+2=Z=z^2$ より $z^2=4,\ 0$

$\therefore$ $z=\pm 2,\ 0$

また $z+2=y=x^2$ より

$x^2=4,\ 0,\ 2$

$\therefore$ $x=\pm 2,\ \pm\sqrt{2},\ 0$ (重解)

これより $\theta=0°,\ 180°,\ 90°,\ 270°,\ 45°,\ 315°,\ 135°,\ 225°$

(4) **16 等分方程式**

$2\cos 16\theta=(2\cos 8\theta)^2-2$, $X^2-2-2\cos 8\theta=0$ より $(X^2-2)^2-2-2\cos 16\theta=0$ となる.

○円周の 16 等分について (円に内接する正 16 角形)

上記の 8 等分以外の数値として

$x^2-2=\pm\sqrt{2}$ より $x=\pm\sqrt{2\pm\sqrt{2}}$

このように, 2 等分は限りなく可能である.

2. 角の 3 等分について

(5) **3 等分方程式**

加法定理より $\cos 3\theta=4\cos^3\theta-3\cos\theta$ において $2\cos\theta=x$ とおくと $x^3-3x-2\cos 3\theta=0$

これより $x^3-3x-4\cos^3\theta-3\cos\theta=0$

$\therefore$ $(x-2\cos\theta)(x^2+2\cos\theta\cdot x+4\cos^2\theta-3)=0$

これを解くと $x=2\cos\theta,\ 2\cos(120°+\theta),\ 2\cos(120°-\theta)$ となる.

○円周の 3 等分について (円に内接する正 3 角形)

$2\cos^3\theta=2$ とおくと $x^3-3x-2=0$

$(x-2)(x+1)^2=0$

$\therefore$ $x=2,\ -1$ (重解)

これより $\theta=0°,\ 120°,\ 240°$

(6) **6 等分方程式**

$\cos 6\theta=32\cos^6\theta-48\cos^4\theta+18\cos^2\theta+1$

$2\cos\theta=x$ とおくと, $x^2-6x^4+9x^2-2-2\cos 6\theta=0$

ここで $x^2=y$, $y-2=X$ とおくと

$X^3-3X-2\cos 6\theta=0$ は, 3 等分方程式と同形である.

○円周の 6 等分について (円に内接する正 6 角形)

$X^3-3X-2=0$ より, $X=2,\ -1$ (重解)

$X+2=y=x^2$ より $x=\pm 2,\ \pm 1$ (重解)

これより $\theta=0°,\ 180°,\ 60°,\ 300°,\ 120°,\ 240°$

(7) **9 等分方程式**

$\cos 9\theta=2^8\cos^9\theta-9\times 2^6\cos^7\theta+27\times 2^4\cos^5\theta-30\times 2^2\cos^3\theta-9\cos\theta$

で $2\cos\theta=x$ とおくと

$x^9-9x^7+27x^5-30x^3+9x-2\cos 9\theta=0$ となる.

ここで $x^3-3x=X$ とおくと

$X^3-3X-2\cos 9\theta=0$ は, 3 等分方程式と同形である.

○円周の 9 等分について (円に内接する正 9 角形)

$X^3-3X-2=0$ より $X=2,\ -1$ (重解)

$X=x^3-3x$ より $x^3-3x-2=0,\ x^3-3x+1=0$

1. $x^3-3x-2=0$ のとき $x=2,\ -1$ (重解)
2. $x^3-3x+1=0$ のとき $x^3-3x-2\cos 120°=0$

となり, その解は, $2\cos 40°(2\cos 320°)$, $2\cos 80°(2\cos 280°)$, $2\cos 160°(2\cos 200°)$ となる.

この値は, いずれも近似値しか求めることができないから, 定規とコンパスによる正 9 角形の作図はできない.

(8) **12 等分方程式**

$2\cos 12\theta=(2\cos 4\theta)^3-3\times 2\cos 4\theta$ より

$\cos 4\theta=X^2-2=z$ とおくと, $z^3-3z-2\cos 12\theta=0$

○円周の 12 等分について (円に内接する正 12角形)

$z^3-3z-2=(z-2)(z+1)^2=0$

$\therefore$ $z=2,\ -1$

$z+2=X^2$, $X+2=y=x^2$ より 6 等分以外の数値として, $x=\pm\sqrt{3},\ 0$

$\theta=30°,\ 330°,\ 150°,\ 210°,\ 90°,\ 270°$

このように, 3 等分し, 更に 2 等分を繰り返すことはできるが, 3 等分し, 更に 3 等分することは, 角 θ が 3 の倍数でなくなるのでできない.

3. 角の 5 等分について

(9) **5 等分方程式**

$\cos 5\theta=16\cos^5\theta-20\cos^3\theta+5\cos\theta$ より, $2\cos\theta=x$ とおくと, $x^5-5x^3+5x-2\cos 5\theta=0$ となる.

この 5 次方程式は, 一般に代数的な解法は不可能であるが, この場合, 5 つの解を $2\cos\theta$, $2\cos(72°+\theta)$, $2\cos(72°-\theta)$, $2\cos(144°+\theta)$, $2\cos(144°-\theta)$ とおいて, 次のようにして解であることを確める.

$$(x-2\cos\theta)\{x-2\cos(72°+\theta)\}\{x-2\cos(72°-\theta)\}\times\{x-2\cos(144°+\theta)\}\{x-2\cos(144°-\theta)\}$$

$$=(x-2\cos\theta)\left\{x^2-(\sqrt{5}-1)\cos\theta\cdot x+2\cos 2\theta-\frac{\sqrt{5}+1}{2}\right\}$$

$$\times\left\{x^2+(\sqrt{5}+1)\cos\theta\cdot x+2\cos 2\theta+\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right\}$$

$$=x^5-5x^3+5x-2\cos 5\theta$$

◦円周の 5 等分について (円に内接する正 5 角形)

$2\cos 5\theta=2$ とおくと $x^5-5x^3+5x-2=0$

$$(x-2)(x^2+x-1)^2=0$$

$$x=2,\ \frac{-1\pm\sqrt{5}}{2}\ (\text{重解})$$

これより，$\theta=0°,\ 72°,\ 144°,\ 216°,\ 288°$

(10) 10 等分方程式

$$\cos 10\theta=2^9\cos^{10}\theta-2^7\times 10\cos^8\theta+2^5\times 35\cos^6\theta-2^3\times 50\cos^4\theta-2\times 25\cos^2\theta-1$$

$2\cos\theta=x$ とおくと

$$x^{10}-10x^8+35x^6-50x^4+25x^2-2-2\cos 10\theta=0$$

となり，$x^2=y$，$y-2=X$ とおくと

$X^5-5X^3+5X-2\cos 10\theta=0$ となる．

◦円周の 10等分について (円に内接する正 10 角形)

$X^5-5X^3+5X-2=0$ より

$$X=2,\ \frac{-1\pm\sqrt{5}}{2}\ (\text{重解})$$

$X+2=y=x^2$ より　$x=\pm 2,\ \pm\dfrac{\sqrt{5}\pm 1}{2}$ (重解)

これより　$\theta=0°,\ 180°,\ 36°,\ 324°,\ 72°,\ 288°,\ 108°,\ 252°,\ 144°,\ 216°$

(11) 15 等分方程式

$\cos 15\theta=\cos(16\theta-\theta)$ より $2\cos\theta=x$ とおくと

$$2\cos 15\theta=x^{15}-15x^{13}+90x^{11}-275x^9+450x^7-378x^5+140x^3-15x$$

となり　$x^3-3x=X$ とおくと

$X^5-5X^3+5X-2\cos 15\theta=0$ となるから，この 5 等分方程式を解き，更に 3 等分方程式を解けばよい．

◦円周の 15 等分について (円に内接する正 15 角形)

$X^5-5X^3+5X-2=0$ より

$$X=2,\ \frac{-1\pm\sqrt{5}}{2}\quad(\text{重解})$$

$X=x^3-3x$ より $x^3-3x-2=0$

$\therefore$　$x=2,\ -1$ (重解)

$x^3-3x-\dfrac{\sqrt{5}-1}{2}=0$ のとき $\dfrac{\sqrt{5}-1}{2}=2\cos 72°$ より

$$x^3-3x-2\cos 72°$$

$$=(x-2\cos 24°)(x+2\cos 36°)(x+2\cos 84°)$$

と因数分解でき　$2\cos 36°=\dfrac{\sqrt{5}+1}{2}$ より

$$x^3-3x-\frac{\sqrt{5}-1}{2}=\left(x+\frac{\sqrt{5}+1}{2}\right)\times\left(x^2-\frac{\sqrt{5}+1}{2}x-\frac{3-\sqrt{5}}{2}\right)=0$$

この方程式を解くと，

$$x=-\frac{\sqrt{5}+1}{2},\ \frac{\sqrt{5}+1\pm\sqrt{30-6\sqrt{5}}}{4}$$

同様にして

$-\dfrac{\sqrt{5}+1}{2}=2\cos 144°$，$\dfrac{\sqrt{5}-1}{2}=2\cos 72°$ より

$$x^3-3x+\frac{\sqrt{5}+1}{2}$$

$$=\left(x-\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right)\left(x^2+\frac{\sqrt{5}-1}{2}x-\frac{3+\sqrt{5}}{2}\right)=0$$

$x=\dfrac{\sqrt{5}-1}{2},\ \dfrac{-\sqrt{5}+1\pm\sqrt{30+6\sqrt{5}}}{4}$ となる．

このように，角 θ の値が 3 の倍数のとき (1 次式)×(2 次式) の形に直せるから，角の 5 等分ができる．

4. 角の n 等分について

3 次方程式の解法

3 次方程式

$$x^3+3px+2q=(x-k)(x^2+kx+l)=0$$

とおき，実数解 (主として無理数) をもつ場合に，

$k=u\cos\theta$，$l=u^2\left(\cos^2\theta-\dfrac{3}{4}\right)$ $(u>0)$ とおくと

$u=2\sqrt{-p}$，$\cos 3\theta=\dfrac{-q}{\sqrt{-p^3}}$ となり，その解は，

$x_1=2\sqrt{-p}\cos\theta$，$x_2=2\sqrt{-p}\cos(120°+\theta)$，

$x_3=2\sqrt{-p}\cos(120°+\theta)$

ただし，$\cos 3\theta=\dfrac{-q}{\sqrt{-p^3}}$

(12) 7 等分方程式

$\cos 7\theta=2^6\cos^7\theta-2^4\times 7\cos^5\theta+2^2\times 14\cos^3\theta-7\cos\theta$ より　$2\cos\theta=x$，$2\cos 7\theta=2$ とおくと

$$x^7-7x^5+14x^3-7x-2=(x-2)(x^3+x^2-2x-1)^2=0$$

この 3 次方程式 $x^3+x^2-2x-1=0$ に $x=X-\dfrac{1}{3}$ を代入すると $X^3-\dfrac{7}{3}X-\dfrac{7}{27}=0$ となり，その解の 1 つは $X=\dfrac{2}{3}\sqrt{7}\cos\theta$　ただし，$\cos 3\theta=\dfrac{\sqrt{7}}{14}$ となる．

$$\therefore \quad x=\frac{1}{3}(2\sqrt{7}\cos\theta-1)\left(=2\cos\frac{360^\circ}{7}\right)$$

ただし $\cos 3\theta=\frac{\sqrt{7}}{14}$

(13) 14 等分方程式

$2\cos 14\theta=4\cos^2 7\theta-2$ より　$2\cos\theta=x$ とおくと

$$2\cos 14\theta=x^{14}-14x^{12}+77x^{10}-210x^8+294x^6-196x^4+49x^2-4$$

より　$x^2=y$，$y-2=X$，$2\cos 14\theta=2$ とおくと

$X^7-7X^5+14X^3-7X-2$

$=(X-2)(X^3+X^2-2X-1)^2=0$ となり，その解の1つは $X=\frac{1}{3}(2\sqrt{7}\cos\theta-1)$

$X+2=y=x^2$ より $x=\pm\sqrt{\frac{1}{3}(2\sqrt{7}\cos\theta+5)}$

ただし $\cos 3\theta=\frac{\sqrt{7}}{14}$

(14) 13 等分方程式

$2\cos 13\theta=2\cos(12\theta+\theta)$　より

$2\cos\theta=x$，$2\cos 13\theta=2$　とおくと

$x^{13}-13x^{11}+65x^9-156x^7+182x^5-91x^3+13x+2$

$=(x-2)(x^6+x^5-5x^4-4x^3+6x^2+3x-1)^2=0$

この 6 次方程式

$$x^6+x^5-5x^4-4x^3+6x^2+3x-1=0$$

は　$(2x^3+x^2-2x-3)^2-13(x^2-1)^2$

$=\{2x^3-(\sqrt{13}-1)x^2-x+(\sqrt{13}-3)\}$

$\times\{2x^3+(\sqrt{13}+1)x^2-x-(\sqrt{13}+3)\}=0$

と 3 次方程式の積に変形でき，その方程式の 1 つの解は，

$$x=\frac{1}{6}(2\sqrt{26-2\sqrt{13}}\cos\theta+\sqrt{13}-1)\left(=2\cos\frac{360^\circ}{13}\right)$$

ただし，$\cos 3\theta=\frac{\sqrt{2}(26-5\sqrt{13})}{\sqrt{(13-\sqrt{13})^3}}$ となる．

ここにあげた等分方程式は，3 次方程式の積に直せるが，この 3 次方程式が (2 次式)(1 次式)=0 の形には直せないので，定規とコンパスによる作図はできないのである．

(15) 11 等分方程式

$2\cos 11\theta=2\cos(12\theta-\theta)$　より

$2\cos\theta=x$，$2\cos 11\theta=2$ とおくと

$x^{11}-11x^9+44x^7-77x^5+55x^3-11x-2$

$=(x-2)(x^5+x^4-4x^3-3x^2+3x+1)^2=0$ となるが，この 5 次方程式 $x^5+x^4-4x^3-3x^2+3x+1=0$ は，代数的には解を求めることができないので，定規とコンパスによる作図はできない．

(16) 17 等分方程式

$2\cos 17\theta=2\cos(16\theta+\theta)$ より

$2\cos\theta=x$，$2\cos 17\theta=2$ とおくと

$x^{17}-17x^{15}+119x^{13}-442x^{11}+935x^9-1122x^7+714x^5-204x^3+7x-2$

$=(x-2)(x^8+x^7-7x^6-6x^5+15x^4+10x^3-10x^2-4x+1)^2=0$

となる．この 8 次方程式が 2 次方程式の積に因数分解できることが，正 17 角形が定規とコンパスによって作図ができる必要十分条件である．

そこで，5 等分方程式では

$x^5-5x^3+5x-2\cos 5\theta$

$=(x-2\cos\theta)$

$\times\left\{x^2-(\sqrt{5}-1)\cos\theta\cdot x+2\cos 2\theta-\frac{\sqrt{5}+1}{2}\right\}$

$\times\left\{x^2+(\sqrt{5}+1)\cos\theta\cdot x+2\cos 2\theta+\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right\}$

$=(x-2\cos\theta)\left\{\left(x^2+\cos\theta\cdot x+2\cos 2\theta-\frac{1}{2}\right)^2-5\left(\cos\theta\cdot x+\frac{1}{2}\right)^2\right\}$

また，13 等分方程式では，

$x^6+x^5-5x^4-4x^3+6x^2+3x-1$

$=\frac{1}{4}\{(2x^3+x^2-2x-3)^2-13(x^2-1)^2\}$

と計算の過程で変形されているから，同様にして

$x^8+x^7-7x^6-6x^5+15x^4+10x^3-10x^2-4x+1$

$=\frac{1}{4}\{(2x^4+x^3-3x^2+4x-2)^2-17(x^3+x^2-2x)^2\}$

$=\frac{1}{4}\{2x^4+(\sqrt{17}+1)x^3-(3-\sqrt{17})x^2+(4-2\sqrt{17})x-2\}$

$\times\{2x^4-(\sqrt{17}-1)x^3-(3+\sqrt{17})x^2+(4+2\sqrt{17})x-2\}$ とし，

更に，正 17 角形のかき方 (次のページ参照) より

$$\mathrm{OM}+\mathrm{ON}=\frac{1}{2}\mathrm{OH}=\frac{1}{4}(\sqrt{17}-1+\sqrt{34-2\sqrt{17}})$$

$$\mathrm{OM}\cdot\mathrm{ON}=\frac{1}{2}\mathrm{OI}=\frac{1}{4}(-\sqrt{17}-1+\sqrt{34+2\sqrt{17}})$$

この 2 式から，OM, ON は，2 次方程式の“解と係数の関係”から，次の 2 次方程式の解である．

$x^2-\frac{1}{4}(\sqrt{17}-1+\sqrt{34-2\sqrt{17}})x+\frac{1}{4}(-\sqrt{17}-1+\sqrt{34+2\sqrt{17}})=0$ から

$$x^8+x^7-7x^6-6x^5+15x^4+10x^3-10x^2-4x+1$$

$$=\left\{x^2-\frac{1}{4}(\sqrt{17}-1+\sqrt{34-2\sqrt{17}})x-\frac{1}{4}(\sqrt{17}+1-\sqrt{34+2\sqrt{17}})\right\}$$

$$\times\left\{x^2-\frac{1}{4}(\sqrt{17}-1-\sqrt{34-2\sqrt{17}})x-\frac{1}{4}(\sqrt{17}+1+\sqrt{34-2\sqrt{17}})\right\}$$

$$\times\left\{x^2+\frac{1}{4}(\sqrt{17}+1-\sqrt{34+2\sqrt{17}})x+\frac{1}{4}(\sqrt{17}-1-\sqrt{34-2\sqrt{17}})\right\}$$

$$\times\left\{x^2+\frac{1}{4}(\sqrt{17}+1+\sqrt{34+2\sqrt{17}})x+\frac{1}{4}(\sqrt{17}-1+\sqrt{34-2\sqrt{17}})\right\}$$

ここで，$x^2-\frac{1}{4}(\sqrt{17}-1+\sqrt{34-2\sqrt{17}})x-\frac{1}{4}(\sqrt{17}+1-\sqrt{34+2\sqrt{17}})=0$ より

$$x=\frac{1}{8}\left\{\sqrt{17}-1+\sqrt{34-2\sqrt{17}}\pm\sqrt{(\sqrt{17}-1+\sqrt{34-2\sqrt{17}})^2+4\times4\sqrt{34+2\sqrt{17}}}\right\}$$

$$=\frac{1}{8}\left\{\sqrt{17}-1+\sqrt{34-2\sqrt{17}}\pm2\sqrt{17+3\sqrt{17}-\sqrt{34-2\sqrt{17}}-2\sqrt{34+2\sqrt{17}}}\right\}$$

となり，17 等分方程式の解は，$x=2$ と

① $\frac{1}{8}\left(\sqrt{17}-1+\sqrt{34-2\sqrt{17}}\pm2\sqrt{17+3\sqrt{17}-\sqrt{34-2\sqrt{17}}-2\sqrt{34+2\sqrt{17}}}\right)$

② $\frac{1}{8}\left(\sqrt{17}-1-\sqrt{34-2\sqrt{17}}\pm2\sqrt{17+3\sqrt{17}+\sqrt{34-2\sqrt{17}}+2\sqrt{34+2\sqrt{17}}}\right)$

③ $\frac{1}{8}\left(-\sqrt{17}-1+\sqrt{34+2\sqrt{17}}\pm2\sqrt{17-3\sqrt{17}-\sqrt{34+2\sqrt{17}}+2\sqrt{34-2\sqrt{17}}}\right)$

④ $\frac{1}{8}\left(-\sqrt{17}-1-\sqrt{34+2\sqrt{17}}\pm2\sqrt{17-3\sqrt{17}+\sqrt{34+2\sqrt{17}}-2\sqrt{34-2\sqrt{17}}}\right)$

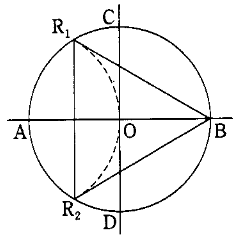
また，解を余弦で表すと，ただし $\frac{360°}{17}=\theta$ とする．

番号	根号の前の複号（+）,	同（−）
①	$2\cos\theta$，$2\cos16\theta$	$2\cos4\theta$，$2\cos13\theta$
②	$2\cos2\theta$，$2\cos15\theta$	$2\cos8\theta$，$2\cos9\theta$
③	$2\cos3\theta$，$2\cos14\theta$	$2\cos5\theta$，$2\cos12\theta$
④	$2\cos6\theta$，$2\cos11\theta$	$2\cos7\theta$，$2\cos10\theta$

これより，定規とコンパスで作図できるのである．

III 幾何的解法

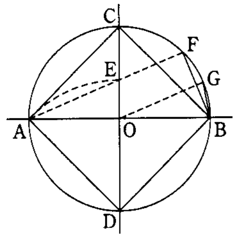
1. 正 3 角形（含正 6 角形，正 12 角形）



点Aを中心として，半径 AO の円をかき，円Oとの交点を R_1，R_2 とすると，線分 R_1R_2 が正 3 角形の 1 辺であり，線分 R_1A が正 6 角形の 1 辺，線分 CR_1 が正 12 角形の 1 辺となる．

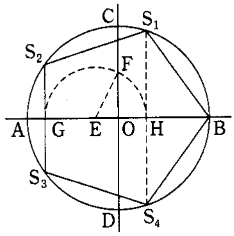
なお，正 6 角形は，この円の半径が 1 辺である．

2. 正方形（正 4 角形）（含正 8 角形，正 16 角形）



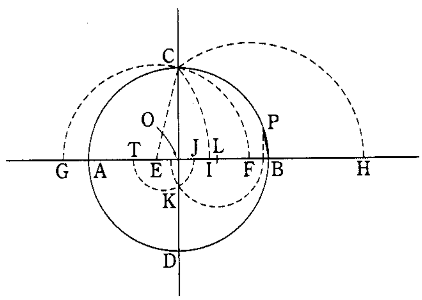
直交する直径 AB，CD の円Oとの交点 B，C，A，D を結ぶと，正方形となり，また CD 上に，DE＝DA となる点Eを，そして，AE を延長して円Oとの交点をFとすると，線分 BF が正 8 角形の 1 辺，更に AE∥OG となる点Gを円O上にとると線分 BG が正 16 角形の 1 辺である．

3. 正 5 角形（含正 10 角形，正 20 角形）



$OE=\frac{1}{4}OA$，$OF=\frac{1}{2}OC$ とし，EF＝EG＝EH となる点 G，H をとり，この 2 点 G，H を通り，AB に垂線をひき，円Oとの交点を，S_2，S_3，S_1，S_4 とすると，線分 BS_1 が正 5 角形の 1 辺であり，線分 S_2A が正 10 角形の 1 辺，線分 S_1C が正 20 角形の 1 辺である．

4. 正 17 角形



$OE=\frac{1}{4}OA$ となる点Eを，直線 AB 上に，

CE＝EF＝EG，CF＝FH，CG＝GI となる点G，H，I をとる．

次に，AO の中点を T，OI の中点を J とし，TJ を直径とする半円が OD と交わる点をKとする．

そして，$\mathrm{KL}=\frac{1}{4}\mathrm{OH}$ となる点Lを OH 上にとり，点Lを中心として，半径 KL の半円が AB と交わる点を M，N とすると 2 組の 3 角形（△OKM と △ONK，△OKJ と △OTK）は相似であるから，OM，ON には，次の関係が成り立つ．

$$\mathrm{OM}+\mathrm{ON}=2\mathrm{KL}=\frac{1}{2}\mathrm{OH}$$

$$\mathrm{OM}\cdot\mathrm{ON}=\mathrm{OJ}\cdot\mathrm{OT}=\frac{1}{2}\mathrm{OI}$$

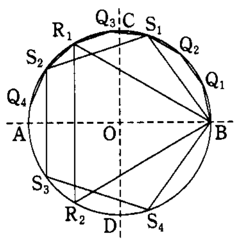
ゆえに，AB⊥MP（OM＞ON）となる点Pを円O上にとるとき，線分 BP が正 17 角形の 1 辺である．

この正 17 角形の作図は，「初等幾何学講義（第一巻）」（柳原吉次著 山海堂 大正 5 年）を参考にしております．

なお，「平面幾何画法集成」（阿部七五三吉著 培風館 昭和 4 年）によると，「正 3 角形，正方形，正 6 角形」のかき方は 1 通りであるが，正 5 角形 (42)，正 8 角形 (6)，正 10 角形 (8)，正 12 角形 (3)，正 15 角形 (4)，正 16 角形 (4) のかき方（括弧内の数字）がある．

次に，正 3 角形，正 5 角形，正 17 角形のうちの 2 つを組み合せた正 n 角形の作図を示すと

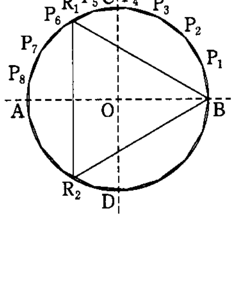
5. 正 15 角形（含正 30 角形，正 60 角形）



正 3 角形の頂点 R_1 と正 5 角形の頂点 S_2 を結ぶ線分 R_1S_2 が正 15 角形の 1 辺である．

次に，点Bより，線分 R_1S_2 の大きさで順に Q_1，Q_2，S_1，Q_3，R_1，S_2，Q_4 とすると線分 Q_4A が正 30 角形の 1 辺，線分 CQ_3 が正 60 角形の 1 辺である．

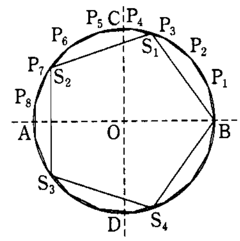
6. 正 51 角形（含正 34 角形）



正 3 角形の頂点 R_1 と正 17 角形の頂点 P_6 を結ぶ線分 R_1P_6 が正 51 角形の 1 辺である．

次に，点Aと正 17 角形の頂点 P_8 を結ぶ線分 P_8A が正 34 角形の 1 辺である．

7. 正 85 角形（含正 68 角形）



正 5 角形の頂点 S_2 と正 17 角形の頂点 P_7 を結ぶ線分 S_2P_7 が正 85 角形の 1 辺である．

次に，点Cと正 17 角形の頂点 P_4 を結ぶ線分 P_4C が正 68 角形の 1 辺である．

Ⅳ おわりに

タイトルを「正 17 角形の代数的解法および幾何的解法」としたのは，正 17 角形を中心として，n 等分方程式の解法および正 n 角形の作図を示したからである．

また，例えば，25 等分方程式は

$$(x-2)\left\{(x^2+x-1)\left(x^5-5x^3+5x-\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right)\right.$$

$$\left.\times\left(x^5-5x^3+5x+\frac{\sqrt{5}+1}{2}\right)\right\}^2=0$$ となり，

一方，40 等分方程式は

$$(x-2)(x+2)\times\{(x^4-3x+1)(x^5-5x^3+5x)$$

$$\times(x^5-5x^3+5x-\sqrt{2})(x^5-5x^3+5x+\sqrt{2})\}^2=0$$ となる．ここで，40 等分方程式の中の 5 次方程式の定数項は $\sqrt{2}$，$-\sqrt{2}$ で $2\cos\theta=\pm\sqrt{2}$ より $\theta=45°$，$135°$ で 5 の倍数であるが，25 等分方程式の中の 5 次方程式の定数項は $\frac{\sqrt{5}+1}{2}$，$\frac{\sqrt{5}-1}{2}$ で

$2\cos\theta=\frac{\sqrt{5}\pm1}{2}$ より $\theta=36°$，$72°$ で 5 の倍数でないから 40 等分方程式は，2 次式以下に因数分解ができるが，25 等分方程式は，これ以上に因数分解ができないのである．これが，定規とコンパスで作図ができるとできないの違いである．

機会があれば，この n 等分方程式の解法と作図ができない正 n 角形の近似画法について述べたいと思います．

（元大分県立国東高等学校）