Hesseの図形再訪

日野(ひの) 雅之(まさゆき)

1. はじめに

コンピュータが身近になるにつれて，初等幾何に対して従来と異なった観点から見直す動きが強まっている．最近のDavisによる論文は“三角形幾何学”の復活について様々な研究の動きを報告している[1]．その中で，コンピュータの発達による新定理の発見，“実験幾何学”の誕生，コンピュータを用いた自動証明の研究などに関して，歴史的に検討がなされている．そのような流れの教育と研究への多くの実践例が，最近の報告集[2]において具体的にまとめられている．古い初等幾何の中に新しい研究題材を探す動きである．

他方，初等幾何に関する書物，出版物は最近その数が極めて少なく，目的の資料を手に入れるのがままならないのが現状である．そのような中で偶然手にしたのがG. Salmonによる教科書「解析幾何学」である．この書物では，数多くの幾何の問題が古典的な解析幾何の手法により明快に解き進められている[3]．その中で訳註者による演習問題として“Hesseの図形”が取り上げられている．これは，1848年にHesseが3次曲線論の研究において発見した図形とされている．少し複雑な図形であり，コンピュータ幾何ソフト *The Geometer's Sketchpad*[4] によって作図し，点や直線を様々に動かすことにより，この図形の面白い性質を実感することができた．ただこの図形に関する資料が身近にはほとんどないのが現状である．

そこで本稿では，Hesseの図形とその興味深いいくつかの性質についてまとめ，それを座標幾何の手法を用いて証明していくことにする．古典的な問題であるが，資料が手に入りにくい現状においてこのようなまとめをする作業は教育的な観点から有意義であると考えられる．

第2節においてHesseの図形の定義を与え，その性質についてまとめ，第3節でその証明を行う．最後に第4節で本稿のまとめをおこなう．

2. Hesseの図形

まずHesseの図形を定義しておく．

定義：平面上に，12個の点の集合 $\mathsf{P}=\{A_i, B_i, C_i\ (i=1, \cdots\cdots, 4)\}$ と16本の直線の集合 $\mathsf{L}=\{L_j\ (j=1, \cdots\cdots, 16)\}$ があり，集合 $\mathsf{H}=\mathsf{P}\cup\mathsf{L}$ が次の3つの条件を満たすとき，H をHesseの図形という．

条件1. 2つの三角形 $\triangle A_2B_2C_2$ と $\triangle A_3B_3C_3$ が背景の位置にある．□

条件2. A_4, B_4, C_4 および A_1, B_1, C_1 は $\triangle A_2B_2C_2$ と $\triangle A_3B_3C_3$ の頂点を結ぶ直線の交点として次のように定義される：

$$L(B_2C_3)\cap L(B_3C_2)=A_4$$
$$L(C_2A_3)\cap L(C_3A_2)=B_4$$
$$L(A_2B_3)\cap L(A_3B_2)=C_4$$
$$L(B_2C_2)\cap L(B_3C_3)=A_1$$
$$L(C_2A_2)\cap L(C_3A_3)=B_1$$
$$L(A_2B_2)\cap L(A_3B_3)=C_1$$

ここで $L(XY)$ は2点X，Yを通る直線を表す．□

条件3. 16本の直線 $L_j\ (j=1, \cdots\cdots, 16)$ はそれぞれ順に次の3点の組を含む：

$\{A_1, B_1, C_1\}$, $\{A_2, B_1, C_2\}$, $\{A_3, B_1, C_3\}$, $\{A_4, B_1, C_4\}$,
$\{A_1, B_2, C_2\}$, $\{A_2, B_2, C_1\}$, $\{A_3, B_2, C_4\}$, $\{A_4, B_2, C_3\}$,
$\{A_1, B_3, C_3\}$, $\{A_2, B_3, C_4\}$, $\{A_3, B_3, C_1\}$, $\{A_4, B_3, C_2\}$,
$\{A_1, B_4, C_4\}$, $\{A_2, B_4, C_3\}$, $\{A_3, B_4, C_2\}$, $\{A_4, B_4, C_1\}$. □

Hesseの図形は興味深い性質をもつ．そのうちいくつかを以下にあげておく．

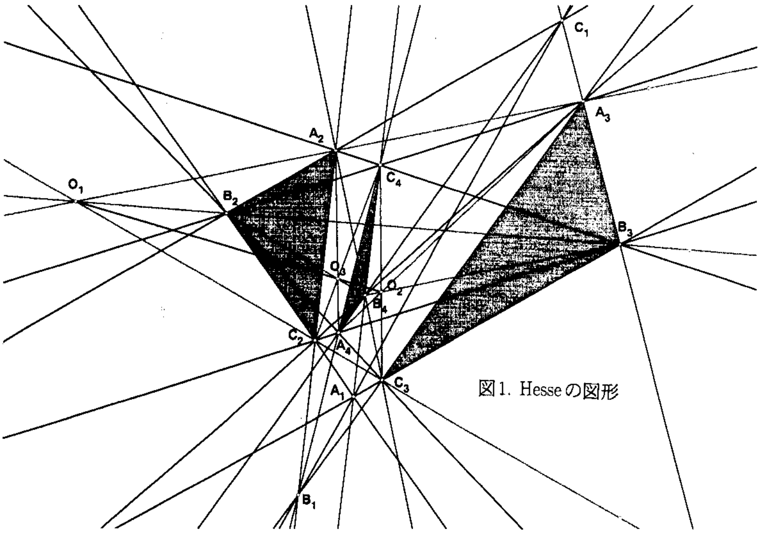

図1. Hesseの図形

Hesseの図形の性質

1. 各点 P(∈P) には L に含まれる 4 本ずつの直線が交わり，各直線 L_j には P に含まれる 3 個ずつの点が存在する．
2. $\triangle A_2B_2C_2$, $\triangle A_3B_3C_3$ および $\triangle A_4B_4C_4$ は 2 つずつ互いに背景の位置にある．
3. 3 点 A_1, B_1, C_1 は同一直線上にあり，それら 3 点の定義により，その直線は $\triangle A_2B_2C_2$ および $\triangle A_3B_3C_3$ の背景の軸である．
4. $\triangle A_2B_2C_2$-$\triangle A_3B_3C_3$, $\triangle A_3B_3C_3$-$\triangle A_4B_4C_4$, $\triangle A_4B_4C_4$-$\triangle A_2B_2C_2$ の背景の中心をそれぞれ O_1, O_2 および O_3 とすると，3 点 O_1, O_2, O_3 は同一直線上にある．

これらの性質のうち，性質 1 は集合 P および L の定義から明らかである．以下の節において性質 2～性質 4 について証明する．

図 1 に Hesse の図形の一例を示す．これは *The Geometer's Sketchpad* を用いて描いた図であり，背景の中心 O_1, 三角形 $\triangle A_2B_2C_2$ および $\triangle A_3B_3C_3$ の配置を様々に変えて，上述した性質が保たれたまま全体が動いていく様子をみると，この図形のもつ不思議さに驚かされる．

3. Hesse の図形の性質の証明

以下では初等幾何的な証明ではなく，三線座標 [3, 5] を用いて解析的な証明を与える．証明には，“3 点が同一直線上にある” ことについての定理

定理 1　3 点 $P_i=\alpha_i:\beta_i:\gamma_i\,(i=1,\ 2,\ 3)$ は

$$\begin{vmatrix} \alpha_1 & \beta_1 & \gamma_1 \\ \alpha_2 & \beta_2 & \gamma_2 \\ \alpha_3 & \beta_3 & \gamma_3 \end{vmatrix}=0$$

を満たすときのみ，同一直線上にある．□

および，“3 直線が 1 点で交わる” ことについての定理

定理 2　3 直線 $l_i\alpha+m_i\beta+n_i\gamma=0\,(i=1,\ 2,\ 3)$ は

$$\begin{vmatrix} l_1 & m_1 & n_1 \\ l_2 & m_2 & n_2 \\ l_3 & m_3 & n_3 \end{vmatrix}=0$$

を満たすときのみ，1 点で交わる．□

を基本にしている．この証明については，文献 [3, 5] が参考になる．性質 2 と性質 3 の証明には次の命題 1 および命題 2 を証明すれば十分である．

命題 1　3 直線 $L(B_2C_2)$, $L(B_3C_3)$, $L(B_4C_4)$ が 1 点 A_1 を通る．

証明　2 直線 $L(B_2C_2)$, $L(B_3C_3)$ の交点 A_1 が直線 $L(B_4C_4)$ の上にあることを示す．

$\triangle A_2B_2C_2$ を参考三角形とする三線座標 $\alpha:\beta:\gamma$ を用いると 3 頂点は，$A_2=1:0:0$, $B_2=0:1:0$, $C_2=0:0:1$ で与えられる．$\triangle A_2B_2C_2$ と $\triangle A_3B_3C_3$ の背景の中心を $O_1=a:b:c$ とすると，$\triangle A_3B_3C_3$ の 3 頂点はそれぞれ $A_3=x:b:c$, $B_3=a:y:c$, $C_3=a:b:z$ で与えられる．ここで x, y, z は適当な定数である．すると直線 $L(B_2C_2)$ および $L(B_3C_3)$ の方程式はそれぞれ $\alpha=0$ および $(yz-bc)\alpha-a(z-c)\beta-a(y-b)\gamma=0$ で表される．A_1 はこれらの交点だからその座標は

$$A_1=0:-(y-b):z-c \tag{1}$$

となる．

他方，直線 $L(C_2A_3)$：$-b\alpha+x\beta=0$ および $L(C_3A_2)$：$z\beta-b\gamma=0$ の交点として B_4：

$$B_4=x:b:z \tag{2}$$

$L(A_2B_3)$：$-c\beta+y\gamma=0$ および $L(A_3B_2)$：$-c\alpha+x\gamma=0$ の交点として C_4：

$$C_4=x:y:c \tag{3}$$

が得られる．

3 点 A_1, B_4, C_4 の座標の行列式は，式(1), (2), (3)を用いて

$$\begin{vmatrix} 0 & -(y-b) & z-c \\ x & b & z \\ x & y & c \end{vmatrix}=0$$

を満たすから，したがって 3 点 A_1, B_4, C_4 は同一直線上にある．□

命題 2　3 点 A_1, B_1, C_1 は同一直線上にある．

証明　命題 1 の証明におけると同様にして点 B_1 および C_1 の座標は

$$B_1=x-a:0:-(z-c)$$

$$C_1=-(x-a):y-b:0$$

で与えられ，式(1)と合わせると，A_1, B_1, C_1 の座標に対する行列式について，

$$\begin{vmatrix} 0 & -(y-b) & z-c \\ x-a & 0 & -(z-c) \\ -(x-a) & y-b & 0 \end{vmatrix}=0$$

は明らかであり，よって A_1, B_1, C_1 は同一直線上にある．□

最後に Hesse の図形の性質 4 を証明する．

性質 4 の証明

$L(B_3B_4)$：$(yz-bc)\alpha+(cx-az)\beta-(xy-ab)\gamma=0$ と $L(C_3C_4)$：$-(yz-bc)\alpha+(zx-ca)\beta-(bx-ay)\gamma=0$ の交点 O_2 は，

$$O_2=x+a:y+b:z+c$$

で与えられ，$L(A_2A_4)$：$-z\beta+y\gamma=0$ と $L(B_2B_4)$：$z\alpha-x\gamma=0$ の交点 O_3 は

$$O_3=x:y:z$$

で与えられる．$O_1=a:b:c$ とこれら O_2, O_3 に対して

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ x+a & y+b & z+c \\ x & y & z \end{vmatrix}=0$$

が成り立つから，よって，3 点 O_1, O_2, O_3 は同一直線上にある．□

以上で Hesse の図形の性質が証明できた．

4. まとめ

第 1 節でふれたが，*The Geometer's Sketchpad*[4] のような "Dynamic geometry software" によって初等幾何の分野に新しい研究スタイルが出てきている[2]．

本稿では古典的な "Hesse の図形" のもつ興味深い性質について考察を行った．ディスプレイの上で様々に図形を変形操作して初めてその不思議な性質を実感できたといえる．

〈参　考　文　献〉

[1] Philip J. Davis, The rise, fall, and possible transfiguration of triangle geometry : a minihistory, *Amer. Math. Monthly* 102 (1995) 204-214.

[2] J. R. King and D. Schattschneider, ed., *Geometry Turned On : Dynamic Software in Learning, Teaching, and Research*, The Mathematical Association of America, Washinton DC, 1997.

[3] G. Salmon, *A Treatise on Conic Sections*, 6th edition, Chelsea Publishing Company, N. Y., 1879, (邦訳) 小倉金之助訳註，サーモン円錐曲線解析幾何学 (山海堂，1914 年)．

[4] *The Geometer's Sketchpad*, Windows version (software), Key Curriculum Press, Berkeley, California, 1993.

[5] C. Kimberling, Central points and central lines in the plane of a triangle, *Math. Magazine* 67 (1994) 163-187.

(東京都穎明館高等学校)