「三角形を解く」ことに関する一考察

高橋　純（たかはし　じゅん）

1. はじめに

三角形を解く問題の型は与えられた要素によって次のように類別される．

Ⅰ．3辺が与えられた場合

Ⅱ．2辺とその夾角が与えられた場合

Ⅲ．1辺と2角が与えられた場合

Ⅳ．2辺とその1つの対角が与えられた場合

解法においてⅠ，Ⅱは余弦定理，Ⅲは正弦定理，Ⅳはまずもう1つの対角を求める場合は正弦定理，まず残りの辺を求める場合は余弦定理を使うことがポイントになる．またⅠ～Ⅲは解が一意に定まる．これは三角形の合同条件により定性的にいえる．しかし，Ⅳの場合は解が一意に定まるとは限らない．それゆえか，数Ⅰ「三角比」における図形の要素を求める問題の中で，生徒の誤答が最も多いのはこのⅣの型に関連したものである．例えば次のような問題がある．

2. ある誤答

以下△ABCにおいて BC$=a$，CA$=b$，AB$=c$ とおく．

[問]　△ABCにおいて，$a=3\sqrt{6}$，$b=2\sqrt{2}$，$A=60^\circ$ のとき，c を求めよ．(＊)

解答は以下の通りである．

余弦定理 $a^2=b^2+c^2-2bc\cos A$ より，

$$(3\sqrt{6})^2=(2\sqrt{2})^2+c^2-2\cdot 2\sqrt{2}\cdot c\cdot\frac{1}{2}$$

これを解いて $c=\sqrt{2}\pm 4\sqrt{3}$

$c>0$ より，$c=\sqrt{2}+4\sqrt{3}$　…… (答)

この問題について，次のような生徒の誤答があった．

正弦定理 $a\sin B=b\sin A$ より，

$3\sqrt{6}\sin B=2\sqrt{2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}$　　ゆえに $\sin B=\frac{1}{3}$

$\sin^2 B+\cos^2 B=1$　より　$\left(\frac{1}{3}\right)^2+\cos^2 B=1$

よって　$\cos B=\pm\frac{2\sqrt{2}}{3}$

余弦定理 $b^2=c^2+a^2-2ca\cos B$ より，

$\cos B=\frac{2\sqrt{2}}{3}$ のとき

$$(2\sqrt{2})^2=c^2+(3\sqrt{6})^2-2c\cdot 3\sqrt{6}\cdot\frac{2\sqrt{2}}{3}$$

これを解いて $c=4\sqrt{3}\pm\sqrt{2}$

$c>0$ よりこれらはともに適する．

$\cos B=-\frac{2\sqrt{2}}{3}$ のとき

$$(2\sqrt{2})^2=c^2+(3\sqrt{6})^2 2c\cdot 3\sqrt{6}\cdot\left(-\frac{2\sqrt{2}}{3}\right)$$

これを解いて $c=-4\sqrt{3}\pm\sqrt{2}$

$c>0$ よりこれらはともに不適．

以上より $c=4\sqrt{3}\pm\sqrt{2}$　…… (答)

誤答の原因は条件 $A=60^\circ$ を考慮していないところにある．更に以下の解の吟味が加われば正答となる．

余弦定理 $\cos A=\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}$ より，

$c=4\sqrt{3}+\sqrt{2}$ のとき，

$$\cos A=\frac{(2\sqrt{2})^2+(4\sqrt{3}+\sqrt{2})^2-(3\sqrt{6})^2}{2\cdot 2\sqrt{2}\cdot(4\sqrt{3}+\sqrt{2})}=\frac{1}{2}$$

$A=60^\circ$ はこれを満たす．

$c=4\sqrt{3}-\sqrt{2}$ のとき，

$$\cos A=\frac{(2\sqrt{2})^2+(4\sqrt{3}-\sqrt{2})^2-(3\sqrt{6})^2}{2\cdot 2\sqrt{2}\cdot(4\sqrt{3}-\sqrt{2})}=-\frac{1}{2}$$

$A=60^\circ$ はこれを満たさない．

(答)　$c=4\sqrt{3}+\sqrt{2}$

しかし，この解の吟味の必要性に気づくことは生徒にとって容易ではない．なぜなら $A=60^\circ$ という条件は正弦定理で $\sin B=\frac{1}{3}$ を求めるときに使っているので，この条件は既に考慮に入れたつもり

だからである．式を立てて計算をする前に，解の個数をあらかじめ知ることができれば，このような誤答をある程度防ぐことはできるのではないかと考え，IVにおいて解が一意に定まる場合，およびそうでない場合それぞれの定量的な条件についてまとめる必要性を感じた．以下それについて述べる．

3．2辺と1つの対角が与えられた場合の解の個数の類別

2辺 a，b と1つの対角 A が与えられたときに，まず c を求めることを考える(他の2辺と1対角が与えられた場合も同様である)．

余弦定理より $a^2=b^2+c^2-2bc\cos A$ であるから，

$$c^2-2b\cos Ac+b^2-a^2=0 \quad \cdots\cdots \text{①}$$

c の2次方程式①が1つの正の解をもてば解は一意に定まり，①が異なる2つの正の解をもてば解は一意に定まらず，2つあることになる．①の判別式を D，$f(c)=c^2-2b\cos Ac+b^2-a^2$ とおく．

[1]　①が1つの正の解をもつ場合

この場合は更に次の2つの場合に分けられる．

(1)　①が正の重解をもつ場合

$$\begin{cases} \dfrac{D}{4}=(-b\cos A)^2-(b^2-a^2)=0 & \cdots\cdots \text{②} \\ b\cos A>0 & \cdots\cdots \text{③} \\ f(0)=b^2-a^2>0 & \cdots\cdots \text{④} \end{cases}$$

(2)　①が1つの正の解と1つの負の解をもつ場合

$$f(0)=b^2-a^2<0 \quad \cdots\cdots \text{⑤}$$

(3)　①が1つの正の数と0を解にもつ場合

$$\begin{cases} \dfrac{D}{4}=(-b\cos A)^2-(b^2-a^2)>0 & \cdots\cdots \text{⑥} \\ b\cos A>0 & \cdots\cdots \text{③} \\ f(0)=b^2-a^2=0 & \cdots\cdots \text{⑦} \end{cases}$$

[2]　①が2つの異なる正の解をもつ場合

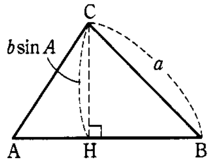
$$\begin{cases} \dfrac{D}{4}=(-b\cos A)^2-(b^2-a^2)>0 & \cdots\cdots \text{⑥} \\ b\cos A>0 & \cdots\cdots \text{③} \\ f(0)=b^2-a^2>0 & \cdots\cdots \text{④} \end{cases}$$

ここで⑥は $a^2-b^2(1-\cos^2 A)>0$，$a^2-b^2\sin^2 A>0$

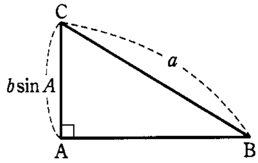
$a>0$，$b>0$，$0^\circ<A<180^\circ$ より，

$$a>b\sin A \quad \cdots\cdots \text{⑥}$$

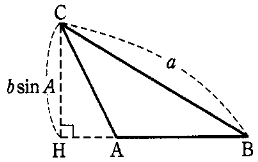
と書きかえられるが△ABCにおいてはこれは自明な条件である．なぜなら△ABCにおいてCから直線ABに垂線CHを下ろすと $\mathrm{CH}=b\sin A$ ところが△CHBにおいて $\mathrm{BC}^2=\mathrm{CH}^2+\mathrm{BH}^2>\mathrm{CH}^2$ つまり $a^2>(b\sin A)^2$ すなわち⑥が得られる．(図)



$A<90^\circ$ の場合



$A=90^\circ$ の場合



$A>90^\circ$ の場合

したがって△ABCにおいて②は成り立たない．更に $a>0$，$b>0$，$0^\circ<A<180^\circ$ から③，④，⑤，⑦はそれぞれ

$$0^\circ<A<90^\circ \quad \cdots\cdots \text{③}, \qquad b>a \quad \cdots\cdots \text{④}$$

$$b<a \quad \cdots\cdots \text{⑤}, \qquad b=a \quad \cdots\cdots \text{⑥}$$

と書きかえられるので，結局次のことがいえる．

△ABCにおいて，a，b，A が与えられたとき，

[1]　$b<a$　または $\begin{cases} 0^\circ<A<90^\circ \\ b=a \end{cases}$　ならば

解は一意に定まり

$c=b\cos A+\sqrt{a^2-b^2\sin^2 A}$　となる．

[2]　$\begin{cases} 0^\circ<A<90^\circ \\ b>a \end{cases}$　ならば

解は2つ存在し

$c=b\cos A\pm\sqrt{a^2-b^2\sin^2 A}$　となる．

(神奈川大学附属高等学校)