$f(x+1)-f(x)$ の効用（その２）

和分・差分・漸化式を高校数学の１つのコンセプトに

石橋（いしばし）　信夫（のぶお）

4. 和分・差分と微分・積分

(1)　定和分と微分積分学の基本定理

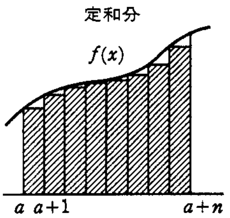
$\varDelta^{-1}f(x)=F(x)$ とすると

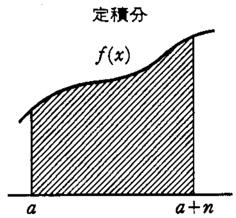
$\varDelta F(x)=f(x)=F(x+1)-F(x)$ となる．

$$\begin{aligned}
&F(a+1)-F(a)=f(a)\\
&F(a+2)-F(a+1)=f(a+1)\\
&F(a+3)-F(a+2)=f(a+2)\\
&\quad\vdots \qquad\qquad\qquad\quad \vdots\\
+)\ &\underline{F(a+n)-F(a+n-1)=f(a+n-1)}\\
&\sum_{x=a}^{a+n-1}f(x)=F(a+n)-F(a)=\Big[\varDelta^{-1}f(x)\Big]_a^{a+n}
\end{aligned}$$

……①

図で表すと，





基本定理の説明は教科書では，「$\dfrac{\varDelta s}{\varDelta x}$＝平均の高さ」からもっていっているが，階差数列の①の公式と定和分の図で幅を狭めていけば，両端の値だけで十分面積が求められることがわかると思う．

ライプニッツもこれから基本定理を思いついたと言われる．

真ん中が打ち消し合って両端の値だけで積分の値が求められることは線積分のグリーンの定理でも同様である．閉曲線上の積分は，x，y 方向両方をやらなくとも，その周上だけ積分すればよいのである．

(2)　不定積分（量）と原始関数（関数）との関係

$F'(x)=f(x)$ を満たす関数 $F(x)$ を $f(x)$ の原始関数というのは定義である．

不定積分は $f(x)$ が連続関数のとき

$\displaystyle\int_a^b f(x)dx=f(\xi)(b-a)$ となる点 ξ がとれるから $F(y)=\displaystyle\int_a^y f(x)dx$ に対して $F'(y)=f(y)$ が言え，はじめて不定積分と原始関数が一致する．

積分には歴史的に２つの流れがあって，接線の逆としての関数と，それまでにあった求積法（量）とが結びついたものである

図式すると　導関数 $\longleftrightarrow$ 原始関数（関数）

　　　　　　微分 $\longleftrightarrow$ 不定積分（積み上げ量）

極論すると $f(x)$ の微分は $f'(x)$ ではなく，$f'(x)dx=df$ のことで，その微小変化量 dx を $\int$ で積み上げていくと $\int f'(x)dx=f(x)$ と解釈するべきである．具体的に時間 t と道のり x 速度を v とすれば $v\varDelta t\fallingdotseq\varDelta x$ が微分である．dx，dy を分離できれば置換積分がうまく説明できる．積分には積み上げていく量の概念と関数の二面性があるのである．

(3)　汎調和級数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^p}$ の収束，発散

(i)　$p=1$ のとき $1+\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{3}+\cdots\cdots+\dfrac{1}{n}+\cdots\cdots$ は発散する．

(ii)　$p>1$ のときは収束する．

これは積分判定法で「$f(x)$ が$[1,\ \infty)$ で単調に減少する連続関数で $f(x)\geqq 0$ とする．

$a_n=f(n)$ とするとき正項級数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ が収束するための必要十分条件は $\displaystyle\int_1^{\infty}f(x)dx$ が有限である」ことからくる．これにあてはめると

$$\int_1^{\infty}\frac{1}{x^p}dx=\begin{cases}\left[\dfrac{x^{1-p}}{1-p}\right]_1^{\infty} & (p\neq 1)\\[2ex] \Big[\log x\Big]_1^{\infty} & (p=1)\end{cases}$$

これから $p>1$ のとき収束し，$0<p\leqq 1$ のときと $p\leqq 0$ のときは発散する．

(iii) $p=2$，pが偶数，奇数の場合

$p=2$ のとき $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}=\frac{\pi}{6}$，

一般に $\zeta(p)=\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^p}$ としてBをベルヌーイ数とする．pが偶数のときは

$$\zeta(2p)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{2p}}=\frac{(2\pi)^{2p}(-1)^{p-1}}{2(2p)!}B_{2p}$$ となる．

ただし，pが奇数のとき，$\zeta(p)$を表す式は知られていない．

(4) ベータ関数とガンマ関数

$B(u,\ v)=\displaystyle\int_0^1 t^{u-1}(1-t)^{v-1}dt$ $(u>0,\ v>0)$ をベータ関数という．ベータ関数はガンマ関数で表すことができる．

$B(u,\ v)=\dfrac{\Gamma(u)\Gamma(v)}{\Gamma(u+v)}$ である．

$B(u,\ v)=2\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}}(\cos\theta)^{2u-1}(\sin\theta)^{2v-1}d\theta$ という性質もある．すると

$$\left\{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\right\}^2=B\left(\frac{1}{2},\ \frac{1}{2}\right)=2\int_0^{\frac{\pi}{2}}d\theta=\pi$$

ゆえに $\Gamma\left(\dfrac{1}{2}\right)=\sqrt{\pi}$

このことから $\displaystyle\int_0^{\infty}e^{-x^2}dx=\frac{\sqrt{\pi}}{2}$ これは確率で大切な公式．ベータ関数の定義において $u-1=m$，$v-1=n$，$x=a+(b-a)t$ とおけば

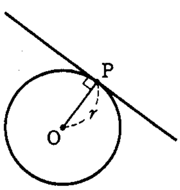
$$\int_a^b(x-a)^m(b-x)^n dx=\frac{m!\,n!}{(m+n+1)!}(b-a)^{m+n+1}$$

が得られこれは $\displaystyle\int_\alpha^\beta(x-\alpha)(x-\beta)dx=-\frac{1}{6}(\beta-\alpha)^3$，

$\displaystyle\int_\alpha^\beta(x-\alpha)(x-\beta)^2dx=\frac{1}{12}(\beta-\alpha)^4$ の一般化である．

(5) 円の方程式と局所的，大局的性質

円の方程式は高校数学では重要な教材である．しかし，1つのxに対して2つのyの値が対応するので関数ではなく図形と方程式といった取り扱いになる．差分法に接線は出てこないが，円は局所的性質と大局的性質が微積分を通して端的に結びつく教材なのでここで取り上げる．



円の接線 TP⊥半径 OP は局所的性質で，極限の形で表された性質である．一方の大局的性質は OP$=r$ を満たす点Pの集合となる．局所的性質は $\dfrac{dy}{dx}=-\dfrac{x}{y}$ $(y\neq 0)$ と書ける．

これから $x\,dx+y\,dy=0$ として，$\int$で両辺を積み上げていくと $\int x\,dx+\int y\,dy=a'$ (a' は定数)

よって，$x^2+y^2=a$ となり大局的性質にたどり着く．もちろん逆も言える．integral は全体的，大局的といった意味もあり，この例がまさにこれにあたる．

5. 場合の数と差分法

(1) $n!$，${}_nP_r$，${}_nC_r$ の差分的解釈

(i) $n!$ と並べ方

n個の○が並んでいる所に ○ ○ ○…○，×1個を加えるにはn個の間と両側のどこかであるから $n+1$ 通りのおき方がある．

すなわち $f(n+1)=(n+1)f(n)$，$f(0)=1$ より $f(n)=n!$

(ii) ${}_nP_r=n\,{}_{n-1}P_{r-1}$ の組合せ論的解釈

話を簡単にするために ${}_5P_3=5\times{}_4P_2$ を説明する．いまA，B，C，Dの4つから2つ取った順列に新しくEが加わって5つから3つ取った順列を考える．A，B，C，Dをランダムに並べ左から2つをこの順番に取るとする．下の図ではD，Aをとることになる．

× Ⓓ × Ⓐ × Ⓑ × Ⓒ ×

① ② ③ ④ ⑤

ここでEが入る場所は×印の①〜⑤である．ここで①〜③の場合は新しくEを含め左から3つ取ればよい．ここでEが④に入った場合はBを入れD，A，B，⑤に入った場合はCを入れD，A，Cとすればよい．すなわちEが④，⑤の場合はそのEの左隣を新しく入れてやればよい．するとEの入れ方は5通りだから ${}_5P_3=5\times{}_4P_2$ が成り立つ．これは $r=n$ の場合すぐに ${}_mP_n=n!$ が出てくる．

(iii) ${}_nC_r=\dfrac{n}{r}{}_{n-1}C_{r-1}$ の組合せ論的解釈

${}_nC_r={}_{n-1}C_r+{}_{n-1}C_{r-1}$ は差分的にあとで示すとして ${}_nC_r=\dfrac{n}{r}{}_{n-1}C_{r-1}$ は応用数学の分野において，階乗の計算の部分ですぐに大きな値が出てこないので意味のある式である．

いま ${}_nC_r=\dfrac{n}{r}{}_{n-1}C_{r-1}=\left(\dfrac{r}{r}+\dfrac{n-r}{r}\right){}_{n-1}C_{r-1}$

$$={}_{n-1}C_{r-1}+\frac{n-r}{r}{}_{n-1}C_{r-1}$$

と変形し，話を簡単にするために，

${}_7C_4=\dfrac{7}{4}{}_6C_3={}_6C_3+\dfrac{3}{4}{}_6C_3$ を説明する．

いまA，B，C，D，E，Fから3つ選ぶ方法は ${}_6C_3$，Gを新たに加え初めの3つにGが加わる場合は ${}_6C_3$．ところが4つの中にGが入っていない場合，例えば初めにA，B，Cの3つが選ばれ，それにD，E，Fが入ってくる場合は $3\times{}_6C_3$ となる．しかし例えば新しくA，B，C，Dとなる場合は4通りあるので結局Gが入っていない場合は $\dfrac{3}{4}\times{}_6C_3$．

よって ${}_7C_4={}_6C_3+\dfrac{3}{4}{}_6C_3=\dfrac{7}{4}{}_6C_3$．

(2) 二項係数の拡張

$\dbinom{x}{n}=\dfrac{x^{(n)}}{n!}$ と定義する．($n=0$, 1, 2, ……)

$$\varDelta\binom{x}{n}=\binom{x+1}{n}-\binom{x}{n}$$

$$=\frac{(x+1)x\cdots(x-n+2)}{n!}-\frac{x(x-1)\cdots(x-n+1)}{n!}$$

$$=\frac{\{(x+1)-(x-n+1)\}x(x-1)\cdots(x-n+2)}{n!}$$

$$=\frac{nx(x-1)\cdots\cdots(x-n+2)}{n!}=\binom{x}{n-1}\ \cdots\cdots ①$$

ここで $x=n$, $n=r$ とすれば①は

${}_{n+1}C_r={}_nC_r+{}_nC_{r-1}$ となる．

更に $\dbinom{-x}{n}=\dfrac{(-x)^{(n)}}{n!}$

$$=\frac{(-x)(-x-1)\cdots\cdots(-x-n+1)}{n!}$$

$=(-1)^n\dbinom{x+n-1}{n}$ が成り立つ．

ここで $x=n$, $n=r$ とすれば

$\dbinom{-n}{r}=(-1)^r\dbinom{n+r-1}{r}$ となりこれが負の二項係数である．

ここで重複組合せの個数は ${}_nH_r=\dbinom{n+r-1}{r}$ だから ${}_nH_r$ は符号 $(-1)^r$ を除けば負の二項係数と一致する．

(3) 順列，組合せの写像としての把握

順列，組合せを分配問題の一部として捕えてみる．k 個の玉を n 個の箱に入れる場合を考える．玉，箱が区別がつく，つかないで，その組合せは4通り，またその分配方法として任意の配り方，1対1の配り方，上への配り方を分けると3通りある．玉，箱，配り方をまとめると12通りのパターンがある．玉を k 個，箱を n 個としてその結果のみを表にする．詳しくは最後の参考文献で．

玉区別 k 個	箱区別 n 個	任意の配り方	1対1の配り方	上への配り方
有	有	n^k	${}_nP_k$	$\sum_{i=0}^{n}(-1)^i{}_nC_i(n-i)^k$
無	有	${}_nH_k$	${}_nC_k$	${}_{k-1}C_{n-1}$
有	無	ベル数 (第2種スターリング数の和)	$k\leqq n$ のとき1 $k>n$ のとき0	第2種スターリング数
無	無	分割数の和	$k\leqq n$ のとき1 $k>n$ のとき0	制限つき分割数

6. 漸化式を用いた場合の数の問題

(1) 10段の階段がある．これを上がるのに1段ずつでも2段ずつでもよく，また1段と2段とを混ぜて上ってもよいものとすると何通りの方法があるか．(これは大学入試にもよく出る問題)

解 条件を満足する n 段の上がり方が $f(n)$ 通りあるとすると，$f(n)$ は $f(n-1)$……$n-1$ 段上って更に1段上がるのと $f(n-2)$……$n-2$ 段上って更に2段上がる和に等しい．

よって $f(n)=f(n-1)+f(n-2)$

$f(1)=1$, $f(2)=2$ は明らかだからこれから順番に値を求めると $f(10)=89$

これはフィボナッチ数列の最初の項をとり去ったものと等しい．

(2) A，B2人がそれぞれ資金 m 円，n 円をもって賭けをあらそう．勝負は5分5分で1回ごとに勝者は敗者から1円を取りあげる．Aが資金を全部失う確率を求めよ．

解 資金 x 円で(この先)破産する確率を $f(x)$ とする．

Aは1回の勝負で勝てば資金が $m+1$ 円に，負ければ $m-1$ 円になり，どちらかになるのは5分5分だから

$$f(m)=\frac{1}{2}f(m+1)+\frac{1}{2}f(m-1)$$

これを変形して

$$f(m+1)-f(m)=f(m)-f(m-1)$$

これは $f(m)$ が等差数列で

$$f(0)=1,\ f(m+n)=0$$

より $f(m)=1-\dfrac{m}{m+n}=\dfrac{n}{m+n}$

この結果から例えば $m=10$ 円，$n=90$ 円 とすれば

$$f(10)=\frac{90}{100}=\frac{9}{10}$$

一言でいえばお金のないときはギャンブルすべからずか，乱数を使えばプログラミングもでき，結果も予測できる．

(3) 3本の空びんで1本もらえるジュースがある．ではこのジュースを67本買うと全部で何本飲めるか(1969年の「数学セミナー」に載った問題だが，リサイクル運動の高まりを考えるとこれから使えるかもしれない)．

解 3本ずつ組にしてやってもできるが，一般化のために漸化式を用いる．n 本買った飲める本数を $f(n)$ 本とする．n 本買ったとき $f(n)$ 本飲めて，残った空びんが r 本($r=1$ か $r=2$)だったとする．

$r=1$ のとき，更に2本買うともう1本飲めるから結果3本飲めて1本空びんが残る．

$r=2$ のとき，更に2本買うともう1本飲めるから結果3本飲めて2本空びんが残る

$r=1$，$r=2$ を合わせて $f(n+2)=f(n)+3$ が言える．$f(1)=1$，$f(2)=2$ で n が奇数，偶数で分けられ階差数列から

$f(67)=3\times33+1=100$ となり100本飲める．

(4) コインを n 回投げる．このとき表と裏の系列の中で表が2回続けて出る確率 P_n を求めよ．

解 正面から取り組むと場合分けが大変だが，余事象と漸化式を使うと簡単になる．

コインを k 回投げたとき表と裏の系列の中で表が2回続けて現れない確率を Q_k とする．

Q_n は次の2つの場合の和として表される．

n 回目が裏の場合 $\left(\text{確率}\ \dfrac{1}{2}\right)$

$n-1$ 回目が表でかつ n 回目が裏の場合 $\left(\text{確率}\ \dfrac{1}{4}\right)$

よって $Q_n=\dfrac{1}{2}Q_{n-1}+\dfrac{1}{4}Q_{n-2}$ が得られる．

$t^2-\dfrac{1}{2}t-\dfrac{1}{4}=0$ の解 $\dfrac{1\pm\sqrt{5}}{4}$ より

$$Q_n=\frac{5+2\sqrt{5}}{10}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{4}\right)^{n-1}+\frac{5-2\sqrt{5}}{10}\left(\frac{1-\sqrt{5}}{4}\right)^{n-1}$$

$$P_n=1-Q_n=1-\frac{5+2\sqrt{5}}{10}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{4}\right)^{n-1}-\frac{5-2\sqrt{5}}{10}\left(\frac{1-\sqrt{5}}{4}\right)^{n-1}$$

となる．

(5) 出合い数(モンモールの問題)

AとBが1から n までの番号を書いた札をもっている．1札ずつ場にさらすとき，同じ番号が出れば出合いが起ったとする．n 枚までさらしたとき出合いが1つも起らない確率を求めよ．

解 集合の包含と排除の公式を用いて解くのが一般的であるが，ここでは漸化式を用いて解く．どの数字も元の位置にない置換を全換置換と呼ぶ．n 個の全換置換の個数を，$f(n)$ で表すと求める確率は $P(n)=\dfrac{f(n)}{n!}$ となる．

いま $n=5$ の場合(昔東大の入試に出た)の漸化式を作ってみる．

1は最初にこれないので $f(5)$ は次の4つの型に分けられる．

A：○1○○○，B：○○1○○，
C：○○○1○，D：○○○○1

ここでAについて考えると，$\overset{2}{○}1\overset{3}{○}\overset{4}{○}\overset{5}{○}$ と○の上に番号をふってみる．上の数2, 3, 4, 5と一致しない様に○に数字を入れる個数は $f(4)$ と一致．またAの場合 $21\overset{3}{○}\overset{4}{○}\overset{5}{○}$ の様に2, 1を固定して3, 4, 5と一致しない入れ方もあり，それは $f(3)$ と一致．これはB, C, Dも同様であるから $f(5)=4\{f(4)+f(3)\}$

ここで，一般に

$$f(n)=(n-1)\{f(n-1)+f(n-2)\}$$

$$P(n)=\frac{f(n)}{n!}=\frac{n-1}{n!}\{f(n-1)+f(n-2)\}$$

$$=\frac{n-1}{n}P(n-1)+\frac{1}{n}P(n-2)$$

これから

$$P(n)-P(n-1)=-\frac{1}{n}\{P(n-1)-P(n-2)\}$$

$$=\frac{(-1)^{n-3}}{n(n-1)\cdots\cdots4}\{P(3)-P(2)\}$$

$$=\frac{(-1)^{n-1}}{n(n-1)\cdots\cdots4}\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{2}\right)=\frac{(-1)^n}{n!}$$

よって

$$P(n)=\frac{1}{2!}-\frac{1}{3!}+\frac{1}{4!}-\cdots\cdots+\frac{(-1)^n}{n!}\quad(n\geqq2)\qquad\cdots\cdots①$$

$P(1)=0$ で①に $1-\dfrac{1}{1!}$ を加えると

$$P(n)=1-\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}-\frac{1}{3!}+\cdots\cdots+\frac{(-1)^n}{n!}\quad(n\geqq1)$$

$n\to\infty$ とすると $P(n)=\dfrac{1}{e}$ となり e が表れる．

数学で重要な数 e が直接表れる数少ない問題であり，n を大きくしていってもその値が一定な値に近づく事は興味ある結果であろう．

7. エピローグ

読み直してみると紙面を費やした割には内容が乏しく，色々な本の雑多な写しでしかない．ただ2003年の次の学習指導要領の1つの参考として，くり返すが統一性，量の重視を意識して書いたつもりである．学習する量が大幅に減るとなると，その効率を考え，統一性は当然でてくるだろうし，理解度を考えると無限の前に具体的量の理解が必要となる．

今までの教材は豊かに繁る木々が集まり森を作っていたが，立ち枯れの木が何本か立っているだけでは寂しい．例えば前の教育課程では加法定理は三角関数だけでなく一次変換にも顔を出していた．木と木を繋ぐ教材として一章をさいて，興味のある生徒に対しての自習のページにしてはどうかというのが現実的提案である．

紙面の都合というより筆者の能力の都合で理解が難しい場所も多いと思うので参考文献を挙げておく．

差分方程式　高橋健人　培風館
差分方程式序説　丸山哲郎　現代数学社
差分学入門　広田良吉　培風館
偏微分方程式の差分解法　高見穎郎他　東京大学出版会
微分方程式と計算機演習　菊地文雄他　山海堂
応用数学　藤田宏　放送大学教育振興会
計算の理論　野崎昭弘他　放送大学教育振興会
順列・組合せと確率　山本幸一　岩波書店
数え上げ組合せ論入論　成嶋弘　日本評論社
モノグラフ漸化式　宮原繁　科学新興社
数学100の問題　日本評論社
新しい高校数学への展望　日本評論社
線形代数入門　斉藤正彦　東京大学出版会
線形代数アラカルト　日本評論社
数学的考え方　栗田稔　啓林館
マイ数学　岡部恒治他　遊星社
微積分の意味　森毅　日本評論社
数学Ⅰ・Ⅱ・Ⅲ…∞　小針晛宏　日本評論社
大学入試数学のルーツ　小寺平治　現代数学社
数学の発想のしかた　秋山仁　駿台文庫
システム工学　須賀雅夫　コロナ社
科学教育思想史　伊藤信隆　共立出版
学習と教育の心理学　市川伸一　岩波書店
大学への数学「解法の探求Ⅱ」　東京出版
ブルーバックス「パズル数学入門」　藤村幸三郎他　講談社
微分学積分学　赤攝也　日本評論社
高校生のためのハイレベル数学Ⅲ　石谷茂　現代数学社

（埼玉県立蓮田高等学校）