整数問題 $\left(1+\dfrac{1}{m}\right)^{m+1}=\left(1+\dfrac{1}{1997}\right)^{1997}$ について

柳田（やなぎだ）　五夫（いつお）

1. はじめに

数学科の先生が

> $$\left(1+\frac{1}{m}\right)^{m+1}=\left(1+\frac{1}{1997}\right)^{1997}$$
> を満たす整数mの値を求めよ．

という問題を３年生の文系の生徒から質問され，職員室で話題になりました．

2. 解答

まず，1997 が素数であることを利用する整数論的解答が考えられる．

[解１] $\left(1+\dfrac{1}{m}\right)^{m+1}=\left(1+\dfrac{1}{1997}\right)^{1997}$ …… ①

［１］ m が自然数の場合

①から

$$m^{m+1}\cdot 1998^{1997}=(m+1)^{m+1}\cdot 1997^{1997} \quad \cdots\cdots ②$$

この等式から $m^{m+1}\cdot 1998^{1997}$ は 1997 の倍数となる．

1997 と 1998 は互いに素であるから，m^{m+1} は 1997 の倍数となる．1997 は素数であるからmは 1997 の倍数となる．

$m=1997p$ $(p\geqq 1)$ とおくと，②から

$(1997p)^{1997p+1}\cdot 1998^{1997}=(1997p+1)^{1997p+1}\cdot 1997^{1997}$

$(1997)^{1997(p-1)+1}\cdot p^{1997p+1}\cdot 1998^{1997}=(1997p+1)^{1997p+1}$

左辺は 1997 で割り切れるが，右辺を 1997 で割った余りは１となるから，自然数pは存在しない．

［２］ $m\leqq -2$ の場合

$n=-m$ $(\geqq 2)$ とおくと

$$\left(1-\frac{1}{n}\right)^{-n+1}=\left(\frac{n}{n-1}\right)^{n-1}=\left(1+\frac{1}{n-1}\right)^{n-1}$$

から①は

$$\left(1+\frac{1}{n-1}\right)^{n-1}=\left(1+\frac{1}{1997}\right)^{1997}$$

となる．$l=n-1$ $(\geqq 1)$ とおくと

$$\left(1+\frac{1}{l}\right)^{l}=\left(1+\frac{1}{1997}\right)^{1997} \quad \cdots\cdots ③$$

③を変形すると

$$l^{l}\cdot 1998^{1997}=(l+1)^{l}\cdot 1997^{1997} \quad \cdots\cdots ④$$

［１］と同様にして，l は 1997 の倍数となるから，$l=1997p$ $(p\geqq 1)$ とおくと

$(1997p)^{1997p}\cdot 1998^{1997}=(1997p+1)^{1997p}\cdot 1997^{1997}$

$(1997)^{1997(p-1)}\cdot p^{1997p}\cdot 1998^{1997}=(1997p+1)^{1997p}$ … ⑤

右辺を 1997 で割った余りは１となるから，$p-1=0$ となる．このとき⑤は成り立つ．よって，$n=1998$ から $m=-1998$

［３］ $m=-1$，0 の場合は明らかに不適． □

数列 $\left\{\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^{n}\right\}$ が単調増加であることを用いると次の解答を得る．

[解２] $\left(1+\dfrac{1}{m}\right)^{m+1}=\left(1+\dfrac{1}{1997}\right)^{1997}$ …… ①

［１］ m が自然数の場合

①から

$$m^{m+1}\cdot 1998^{1997}=(m+1)^{m+1}\cdot 1997^{1997} \quad \cdots\cdots ②$$

この等式から $m^{m+1}\cdot 1998^{1997}$ は 1997 の倍数となる．

1997 と 1998 は互いに素であるから，m^{m+1} は 1997 の倍数となる．1997 は素数であるからmは 1997 の倍数となる．

$\left\{\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^{n}\right\}$ は単調増加であるから，$m\geqq 1997$ のとき

$$\left(1+\frac{1}{m}\right)^{m+1}>\left(1+\frac{1}{m}\right)^{m}\geqq\left(1+\frac{1}{1997}\right)^{1997}$$

となり，①を満たす自然数mは存在しない．

［２］ $m\leqq -2$ の場合

$n=-m$ $(\geqq 2)$ とおくと①は

$$\left(1+\frac{1}{n-1}\right)^{n-1}=\left(1+\frac{1}{1997}\right)^{1997}$$

となる．$\left\{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right\}$ が単調増加であるから

$n-1=1997$ すなわち $m=-1998$ を得る．

［3］ $m=-1$，0 の場合は明らかに不適． □

$\left\{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right\}$ が単調増加，$\left\{\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}\right\}$ が単調減少で

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}=e$$

から

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n<e<\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}\quad(n=1,\ 2\cdots\cdots)$$

を得る．このことを利用すると次の解答を得る．

［解3］ ［1］m が自然数の場合

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n<e<\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}\quad(n=1,\ 2,\ \cdots\cdots)$$

を用いると $\left(1+\frac{1}{1997}\right)^{1997}<e<\left(1+\frac{1}{m}\right)^{m+1}$

だから自然数 m は存在しない．

［2］ $m\leqq-2$ の場合

解2 ［2］$m\leqq-2$ の場合と同じ．

［3］ $m=-1$，0 の場合は明らかに不適． □

［注］ 解3の方法を使うと次のことがわかる．

> 自然数 n に対して
>
> $$\left(1+\frac{1}{m}\right)^{m+1}=\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$$
>
> を満たす整数 m の値は $m=-n-1$ に限る．

不等式 $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n<e<\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}$ $(n=1,\ 2,\ \cdots)$ が広島大学(93年)，$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n<e$ が徳島大学(96年)で出題されている．

> 自然数 n に対して，関数 $f_n(x)=x^ne^{-x}$ を考える．
>
> (1) $x\geqq0$ における $f_n(x)$ の最大値を求めよ．
>
> (2) $n\geqq2$ のとき，不等式
>
> $$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n<e<\left(1+\frac{1}{n-1}\right)^n$$
>
> が成り立つことを示せ． 〔93 広島大〕

> 次の各問いに答えよ．ただし，$e=2.718\cdots\cdots$ は自然対数の底である．
>
> (1) $x>0$ のとき，不等式 $e^x>1+x$ が成り立つことを示せ．
>
> (2) k を正の整数とするとき，不等式
>
> $e>\left(1+\frac{1}{k}\right)^k$ が成り立つことを示せ．
>
> (3) 任意の整数 n に対し，不等式 $n!>\left(\frac{n}{e}\right)^n$ が成り立つことを数学的帰納法により証明せよ．
>
> (4) $99!>33^{99}$，$272!>10^{544}$ であることを示せ．
>
> 〔96 徳島大〕

3. 蛇足

> 数列 $\left\{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right\}$ は単調増加である．

二項定理を使って証明するのが一般的である．

［証明1］ $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n=1+{}_nC_1\frac{1}{n}+{}_nC_2\frac{1}{n^2}$

$$+\cdots\cdots+{}_nC_k\frac{1}{n^k}+\cdots\cdots+{}_nC_n\frac{1}{n^n}$$

$$=1+\frac{n}{n}+\frac{1}{2!}\cdot\frac{n(n-1)}{n^2}$$

$$+\cdots\cdots+\frac{1}{k!}\cdot\frac{n(n-1)\cdots\cdots(n-k+1)}{n^k}$$

$$+\cdots\cdots+\frac{1}{n!}\cdot\frac{n(n-1)\cdots\cdots1}{n^n}$$

$$=1+1+\frac{1}{2!}\left(1-\frac{1}{n}\right)$$

$$+\cdots\cdots+\frac{1}{k!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\cdots\cdots\left(1-\frac{k-1}{n}\right)$$

$$+\cdots\cdots+\frac{1}{n!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\cdots\cdots\left(1-\frac{n-1}{n}\right)$$

また，

$$\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+1}=1+1+\frac{1}{2!}\left(1-\frac{1}{n+1}\right)$$

$$+\cdots\cdots+\frac{1}{k!}\left(1-\frac{1}{n+1}\right)\left(1-\frac{2}{n+1}\right)\cdots\cdots\left(1-\frac{k-1}{n+1}\right)$$

$$+\cdots\cdots+\frac{1}{n!}\left(1-\frac{1}{n+1}\right)\left(1-\frac{2}{n+1}\right)\cdots\cdots\left(1-\frac{n-1}{n+1}\right)$$

$$+\frac{1}{(n+1)!}\left(1-\frac{1}{n+1}\right)\left(1-\frac{2}{n+1}\right)\cdots\cdots\left(1-\frac{n}{n+1}\right)$$

これらの2式の右辺を比較すると，各項は正で，初めの2項は等しいが第 $k+1$ $(k=2,\ 3,\ \cdots\cdots,\ n)$ 項を比較すると

$$\frac{1}{k!}\left(1-\frac{1}{n+1}\right)\left(1-\frac{2}{n+1}\right)\cdots\cdots\left(1-\frac{k-1}{n+1}\right)$$

$$>\frac{1}{k!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\cdots\cdots\left(1-\frac{k-1}{n}\right)$$

が成り立ち，かつ $\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+1}$ の展開式の方が最後の項だけ多い．よって

$$\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+1}>\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n}$$

すなわち $\left\{\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n}\right\}$ は単調増加である． □

相加平均と相乗平均の関係の不等式を使うと次のように証明できる．

［証明 2］ $n\geqq 2$ とするとき，$1+\frac{1}{n}$ を n 個，1 を 1 個とると，相加平均と相乗平均の関係から

$$1+\frac{1}{n+1}=\frac{n\left(1+\frac{1}{n}\right)+1}{n+1}>\sqrt[n+1]{\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n}\cdot 1}$$

ゆえに $\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+1}>\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n}$

$n=1$ のときも

$\left(1+\frac{1}{1+1}\right)^{1+1}=1.5^2>2=\left(1+\frac{1}{1}\right)^{1}$ で成り立つ．

したがって，すべての自然数に対して成り立つ． □

［注］ $n\geqq 2$ とするとき，$\frac{n+1}{n}$ を 1 個，1 を $n-1$ 個とると，相加平均と相乗平均の関係から

$$\frac{n^2}{n^2-1}>\frac{n^2+1}{n^2}=\frac{\frac{n+1}{n}+n-1}{n}>\sqrt[n]{\frac{n+1}{n}}$$

$\left(\frac{n^2}{n^2-1}\right)^{n}>\frac{n+1}{n}$ を変形すると

$\left(\frac{n}{n-1}\right)^{n}>\frac{(n+1)^{n+1}}{n^{n+1}}$ すなわち

$\left(1+\frac{1}{n-1}\right)^{n}>\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}$ を得る．

［注］ $a_n=\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n}$ とおくと，数列 $\{a_n\}$ は単調増加であることが証明できたので，数列 $\{a_n\}$ が上に有界であることを示せば，数列 $\{a_n\}$ が収束することが証明される．

> $\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n}<3$ $(n=1,\ 2,\ \cdots\cdots)$

［証明］ $n=1$ のときは $\left(1+\frac{1}{1}\right)^{1}=2<3$ で成り立つ．

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n}=1+1+\frac{1}{2!}\left(1-\frac{1}{n}\right)$$
$$+\cdots\cdots+\frac{1}{k!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\cdots\cdots\left(1-\frac{k-1}{n}\right)$$
$$+\cdots\cdots+\frac{1}{n!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\cdots\cdots\left(1-\frac{n-1}{n}\right)$$

において，$n>1$ ならば

$$a_n<1+1+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\cdots\cdots+\frac{1}{n!}$$

であるが，

$$n!=1\cdot 2\cdot 3\cdot\cdots\cdots n>\underbrace{2\cdot 2\cdot\cdots\cdots 2}_{(n-1)\text{個}}=2^{n-1}$$

であるから

$$a_n<1+1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\cdots\cdots+\frac{1}{2^{n-1}}$$
$$=1+\frac{1-\frac{1}{2^n}}{1-\frac{1}{2}}=3-\frac{1}{2^{n-1}}<3$$

したがって，$a_n<3$ が成り立つ． □

不等式 $\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n}<3$ $(n=1,\ 2,\ \cdots\cdots)$ が九州大学 (1981 年) で，$\left(1+\frac{2}{n}\right)^{n}<9$ が山形大学 (1997 年) で出題されている．

> (1) 数学的帰納法を用いて，正の整数 k に対して，$k!\geqq 2^{k-1}$ が成立することを示せ．
> (2) $1\leqq k\leqq n$ を満たす整数 k，n に対して $\frac{{}_nC_k}{n^k}\leqq\frac{1}{2^{k-1}}$ が成立することを示せ．
> (3) 正の整数 n に対して $\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n}<3$ が成立することを示せ． 〔81 九州大〕

> 自然数 n に対して，$A_n=\left(1+\frac{2}{n}\right)^{n}$ とする．このとき，次の各問いに答えよ．
> (1) 二項定理を用いて，次の等式を示せ．
> $A_n=1+\sum_{k=1}^{n}\frac{2^k}{k!}\left(\frac{n}{n}\right)\left(\frac{n-1}{n}\right)\cdots\left(\frac{n-k+1}{n}\right)$
> (2) 不等式 $A_n\leqq 1+\sum_{k=1}^{n}\frac{2^k}{k!}$ が成立することを示せ．
> (3) $n\geqq 3$ のとき，(2)の不等式を用いて，
> $A_n\leqq 1+2\sum_{k=3}^{n}\left(\frac{2}{3}\right)^{k-2}$ が成立することを示せ．
> (4) $A_n<9$ であることを示せ．
> 〔97 山形大・理・数理〕

4. おわりに

類題(?)が名古屋大学(1980年)で出題されている.

> 次の(1), (2)を解答せよ.
>
> (1) nを2以上の整数とするとき, $0 \leqq x \leqq 1$における関数$f(x)=(1-x)^{n-1}(1+x)^{n+1}$の値の増減を調べよ.
>
> (2) 2つの数$(0.99)^{99}$と$(1.01)^{-101}$との大小を比較せよ. 〔80 名古屋大・法・文・教育〕

月刊大学への数学 (参考文献 [1]) には不等式

$$\left(1+\frac{1}{1982}\right)^{57}<\left(1+\frac{1}{1983}\right)^{58}$$

が載せられている.

次に $\left(1+\frac{1}{m}\right)^{m+1}=\left(1+\frac{1}{1997}\right)^{1997}$ と似た等式を考えると

$$\left(1+\frac{1}{m+1}\right)^{m}=\left(1+\frac{1}{1997}\right)^{1997}$$

を満たす整数mの値は存在しないことがわかる. また,

$$\left(1+\frac{1}{m}\right)^{m}=\left(1+\frac{1}{1997}\right)^{1998}$$

を満たす整数mの値は $m=-1998$ に限ることがわかる.

参考文献

[1] 大学への数学, 3—83, pp.72—73, 東京出版

(栃木県立栃木高等学校)