不定，不定形，不定形の極限値の指導

富永(とみなが)　雅(まさる)

概　要：本稿では，不定形に関する一連の定義を決定するとともに，その定義に従い ∞^0，0^0，1^∞ が不定であることを示す．更に，7つの不定形をとりあげ，それぞれの計算方法をド・ロピタルの定理を用いて述べることにする．

検索語：不定，不定形，不定形の極限値，ド・ロピタルの定理

第1節　はじめに

一般に，不定形と呼ばれているものには，

$\dfrac{0}{0}$，$\dfrac{\infty}{\infty}$，$0\times\infty$，$\infty-\infty$，∞^0，0^0，1^∞ などに関する式がある(不定形の定義については後で述べる．ここでの 0，1，∞ は勿論，極限をとったときの数である．0 の例として $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\frac{1}{x}$ がある)．

数研通信第 16 号で塩見先生が書かれている『教材研究(微積学) ∞^0，0^0 について』[2]を，興味深く読ませていただき，議論をするうちにいくつかの点で再考の必要性を感じるとともに，まずは不定形に関する一連の数学的用語に統一した定義を与える必要性を感じた．本稿では，その議論から話を展開し，以下の内容について各節で考えていくことにする．

まず第 2 節で，不定，不定形の定義について考えることから始める．ここでは，いくつかの書物の中から不定形の定義を抜粋し，それらの中に含む問題点を解決し，独自に定義を確定する．

第 3 節では，その定義に従って ∞^0，0^0，1^∞ が不定であることを例を用いて示し，第 4 節では，不定形の極限値の計算方法について述べる．第 3，4 節の内容は高校数学では扱われていない．しかし，さほど難しくなく高校生にとっても興味あることと思われる．

また，第 5 節では，文献[2]にも書かれているが，入試問題で幾度か取り上げられた $\displaystyle\lim_{n\to\infty}n^{\frac{1}{n}}$ の値を求める方法をまとめることにする．

第2節　不定，不定形の定義

後節で不定，不定形に関する種々の考察をするために，この節でそれらの定義を確定する．以下の①～③はそれぞれ文献[3]，[4]，[5]による不定形の定義である．

① [5]による不定形の定義

2 つの関数 $f(x)$，$g(x)$ が $x\to a$ のとき $f(x)\to 0$ かつ $g(x)\to 0$ ならば $\displaystyle\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}$ は $\dfrac{0}{0}$ という形になるが，このような形を不定形という．

② [4]による不定形の定義

$\dfrac{1-\cos x}{x^2\cos x}$ は，$x\to 0$ のとき，分母，分子ともに $\to 0$ となり，見かけ上 $\dfrac{0}{0}$ の形となる．このような式を不定形とよぶ．

③ [5]　不定形の定義

関数 $f(x)$，$g(x)$ において $x\to a$ あるいは $x\to\pm\infty$ のとき $f(x)$，$g(x)$ が $\to 0$，1，$\pm\infty$ などになれば，$f(x)\pm g(x)$，$f(x)g(x)$，$\dfrac{f(x)}{g(x)}$，$f(x)^{g(x)}$ は $\infty-\infty$，$\dfrac{0}{0}$，$\dfrac{\infty}{\infty}$，$0\times\infty$，1^∞，0^0，∞^0 の形になることがある．これらをまとめて不定形という．

ところで，上記 3 つの不定形の定義は，果して全て同じ内容を表し，定義として整ったものになっているであろうか．実は，この答えが否定的にならざるを得ないことは，以下のことからわかる．

まず①，②では，一見 $\dfrac{0}{0}$ に関する不定形しか扱われていないようにみえるという点その他にも例えば，

①では，「$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}$ は $\frac{0}{0}$ という形になる」という表現$\left(\text{この部分は，もし書くなら}\ \text{「}\frac{\lim_{x\to a}f(x)}{\lim_{x\to a}g(x)}\ \text{は見かけ上}\ \frac{0}{0}\ \text{という形になる」と表現されるべきであろう}\right)$，②では例をもって数学的術語を説明しているという点，更に，全てにおいて $\frac{0}{0}$，$\frac{f(x)}{g(x)}$ あるいは $\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}$ のどれを指して不定形と呼んでいるのかはっきりしないという点があげられる．これらのことから数学的学術用語として不定に関する一連の用語を厳密に定義するにあたり改善が求められるのではないだろうか．

また，次はどうなるであろうか．

$a>1$ に対して $A_x=(a^{\frac{1}{x}})^x$ を考える．$x\to 0$ のとき $a^{\frac{1}{x}}\to\infty$ となり，A_x は③の定義によると ∞^0 に関する不定形になる．しかし言うまでもなく，$A_x=a$ であり，これでは不定形を考える意味がない（定数となり，極限を取る意味がない）．

更に [1] の中には次のような一文がある．

「$0^0=1$ と言っていいか．普通このように断定しないのは 0^0 が不定，つまり $x>0$ として，$\lim_{x\to 0}f(x)=0$ のとき，$\lim_{x\to 0}x^{f(x)}$ が不定形になるからでしょう．」

この一文から読み取ると，[1] では少なくとも，(不定形の定義としては何も書かれてはいないが，) ①～③での 0^0 のように単に「$x\to 0$ のとき $f(x)\to 0$ を満たす」だけでは不定形というものが定義づけられてはいないことがわかる（これは結果的なことになるが，0^0 が不定であることがわかりさえすれば [1] から予想される定義が，他と同様のものになることがわかる．つまり，どの段階で「0^0 は不定である」がわかっているかにより定義の仕方が異なるのである）．

数学では，何事を定義するにしても，論理的に矛盾が生じることなく，統一されたものである必要がある．したがって，以上のような問題点を含む場合にはやはりその改善が求められる（高等学校の教科書では，不定形という術語は用いられていないようである．このことも上とは違う意味で問題であろう）．

そこで，これらの点を改善する意味も含め本稿では次のように不定形を定義することにする．

不定形の定義 1

定数関数でない関数 $f(x)$，$g(x)$ をとり，$F\equiv\lim_{x\to a}f(x)$，$G\equiv\lim_{x\to a}g(x)$ とおく．(F，G は $\pm\infty$ を含む実数．) このとき，次の条件を満たす定数関数でない関数 $f_0(x)$，$g_0(x)$ が存在するならば，$H(f(x),\ g(x))$ を不定形と呼ぶ．

$$\lim_{x\to a}f_0(x)=F,\quad \lim_{x\to a}g_0(x)=G$$

$$\lim_{x\to a}H(f(x),\ g(x))\neq\lim_{x\to a}H(f_0(x),\ g_0(x))$$

ただし，$H(A,\ B)$ は $A\pm B$，AB，$\frac{A}{B}$，A^B のうちの 1 つを表すことにする．

［注意：このとき，$H(f(x),\ g(x))$ と同様，$H(f_0(x),\ g_0(x))$ も定数関数でなく，また不定形になる．］

また，$\lim_{x\to a}H(f(x),\ g(x))$ を不定形の極限値と呼ぶ．

更に，先にあげた [1] での一文により，不定の定義を次のように定めることができる．

“不定形の定義 1 の仮定・条件を満たす $H(F,\ G)$ を不定という．”

よって，もし $H(F,\ G)$ が不定であるとわかっているならば次のように不定形を定義することができる．

不定形の定義 2

定数関数でない関数 $f(x)$，$g(x)$ をとる．このとき，次の条件を満たす $H(f(x),\ g(x))$ を不定形と呼ぶ．

$$\lim_{x\to a}f(x)=F,\quad \lim_{x\to a}g(x)=G$$

以上 2 つの不定形の定義は $H(F,\ G)$ が不定であることが条件として与えられているか否かが異なる以外は同じものとみなしてよい．また，①，②，③での定義は定義 2 と，[1] から予想される定義は定義 1 と同じ系統であると考えられる．

第 3 節　$\infty^0, 0^0, 1^\infty$ が不定であることを示す

[1]，[2] での内容を参考に，ここでは，第 1 節で列挙した 7 つのうち，指数が関係している ∞^0，0^0，1^∞ が不定であることを示す．

これら 3 つが不定であることは，その事実を知っ

ていれば別であるが，高校生には認識しかねるところではないだろうか．例えば，高校生に 1^{∞} の値を尋ねるとその答えを1とする者が多数いるであろうし，高等学校で数学IIを学んだ者であれば 0^0 の値を1と答えてしまう者もいるかもしれない（勿論，各教科書には，$a^0=1$ ただし，$a \neq 0$ とただし書きがある）．また，∞^0 には首を傾げる者が多いと思われる．このことから考えると高校生もこれら3つには大きな関心を示すのではないだろうか．

次に，実際に ∞^0, 0^0, 1^{∞} が不定であることを例をもって示すことにする．

① **∞^0 が不定であることを示す．**

［1］で与えられた式を利用させていただくことにする．

$x>0$, $g(x)=|\log x|^{-\frac{1}{2}}$ とする．$x \to \infty$ のとき $\frac{1}{x} \to 0$, $g(x) \to 0$ となるから $x^{\frac{1}{x}}$, $x^{g(x)}$ はともに見かけ上 ∞^0 の形となる．そこで，多少の計算をすることにより，$\lim_{x\to\infty} x^{\frac{1}{x}}=1$, $\lim_{x\to\infty} x^{g(x)}=\infty$ となるので ∞^0 が不定であるとわかる．

② **0^0 が不定であることを示す．**

ここでは［1］をそのまま引用する．

$x>0$, $g(x)=|\log x|^{-\frac{1}{2}}$ とする．$x \to 0$ のとき $g(x) \to 0$ となるから x^x, $x^{g(x)}$ はともに見かけ上 0^0 の形となる．そこで多少の計算をすることにより $\lim_{x\to 0} x^x=1$, $\lim_{x\to 0} x^{f(x)}=0$ となるので 0^0 が不定であるとわかる．

③ **1^{∞} が不定であることを示す．**

$\lim_{x\to\pm\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x$ は，数学IIIを履修する者なら誰しも学ぶ値，自然対数の底 e である．ここではこれを利用する．

任意の正の実数 k をとる．$\left(1+\frac{k}{x}\right)^x$ は，$x \to \infty$ のとき，$1+\frac{k}{x} \to 1$ となり，見かけ上 1^{∞} の形となる．ここで，簡単な計算により $\lim_{x\to\pm\infty}(1+\frac{k}{x})^x=e^k$ であるから，k の値として異なる2つの数を選ぶことにより 1^{∞} が不定であるとわかる．

以上①〜③により，∞^0, 0^0, 1^{∞} が不定であることが示せた．①，②の詳しい計算方法については，［1］あるいは，本稿の第4，5節を参考にしていただきたい．

ここで取り上げた不定形の話は，高校生でも充分に理解出来る内容であるにもかかわらず，授業では余り深く取り上げられていないようである．1つの話題として生徒に提供すれば，更に極限に対する興味を引くことが出来るのではないかと考えられる．

第4節　不定形の極限値の計算方法

＝ド・ロピタルの定理を利用して＝

数学で極限を学ぶとき，（生徒が不定形というものを認識していない場合も考えられるが）不定形の極限値の計算は避けることが出来ない（第1節で取り上げた7つのうち教科書では，$\frac{0}{0}$, $\frac{\infty}{\infty}$ がよく利用されているように思う）．そこで，ここでは，［3］を参考に7つの不定形を4つのグループに分け，その計算方法について考えていく．

特に，ここでは，高校の学習範囲から逸脱することにはなるが，計算を簡単にするため次のド・ロピタルの定理を用いて説明する．

ド・ロピタルの定理

開区間上で定義され，$x=a$ を除いて微分可能な関数 $f(x)$, $g(x)$ が，$g'(x) \neq 0\ (x \neq a)$ かつ，$\lim_{x\to a} f(x)=\lim_{x\to a} g(x)=0$, ∞ のとき，つまり，$\frac{f(x)}{g(x)}$ が $x \to a$ で見かけ上 $\frac{0}{0}$, あるいは $\frac{\infty}{\infty}$ の不定形となるとき，$\lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}=A$ ($A=\infty$ であってもよい) ならば $\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=A$ である．

注意：1．ここで $n \to a$ は，$n \to \infty$ あるいは $-\infty$ と置き換えても同じ結論が成り立つ．

2．ド・ロピタルの定理は，拡張して用いることが出来る．(cf.［5］)

3．この証明については，［5］に簡潔に書かれているが，［4］等にも丁寧に書かれている．

4．$\frac{f'(x)}{g'(x)}$ がまた不定形になるときは，再度 $f'(x)$, $g'(x)$ に対してド・ロピタルの定理を用いればよい．以下，同様に微分を続ける．

［6］の中に，このド・ロピタルの定理に関連した興味ある記述があったので紹介だけしておく．

"Taylorの公式により，$f^{(n)}(x)$ が $x=a$ で連続

ならば，x が a に近いとき $f(x)$ の近似値として多項式 $\sum_{k=0}^{n}\frac{f^{(n)}(a)(x-a)^k}{k!}$ の値をとることができる．これを $f(x)$ の第 n 近似式という．……(中略)……またこれを応用して，$x\to a$ のとき $f(x)\to 0$，$g(x)\to 0$ である場合，極限値 $A=\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}$ などを求めることができる．すなわち，例えば a において $f'(x)$，$g'(x)$ が連続，$g'(a)\neq 0$ ならば，$f(x)$，$g(x)$ の第1近似式をとることにより，$A=\frac{f'(a)}{g'(a)}$．このような極限値を $\frac{0}{0}$ の形の不定形の極限値という．"

この節を通して関数 $f(x)$，$g(x)$ はド・ロピタルの定理の仮定（つまり，関数 $f(x)$，$g(x)$ は，開区間上で定義され，$x=a$ を除いて微分可能，$g'(x)\neq 0(x\neq a)$ かつ，$\lim_{x\to a}f(x)=\lim_{x\to a}g(x)=0,\ \infty)$ を満たすものとする．

(1) **$\frac{0}{0}$，$\frac{\infty}{\infty}$ に関する不定形の極限値の計算方法について**

この場合，教科書では，分子・分母を共通の因数で割ったり，ある文字についての巾乗で割るなどして値を求めている．

先のド・ロピタルの定理を用いると，このようなことをする必要なく直接2つの不定 $\frac{0}{0}$，$\frac{\infty}{\infty}$ に関する不定形の極限値の値を求めることができることを意味している．

次に残り5つの計算について考えていく．この場合も(1)と同様ド・ロピタルの定理を用いることができればよいのだが，このままでは直接用いることができない．そこで，それぞれの式に適当な変形を施すことにより(1)の場合に帰着させ解決を見ることにする．

(2) **$0\times\infty$ に関する不定形の極限値の計算方法について**

$$f(x)\times g(x)=\frac{f(x)}{\frac{1}{g(x)}}$$ と変形する．

このとき，$\lim_{x\to a}f(x)=\lim_{x\to a}\frac{1}{g(x)}=0$ となるため見かけ上 $\frac{0}{0}$ の形となり，ド・ロピタルの定理を用いることにより計算できる．

(3) **$\infty-\infty$ に関する不定形の極限値の計算方法について**

$$f(x)-g(x)=\frac{\frac{1}{g(x)}-\frac{1}{f(x)}}{\frac{1}{f(x)}\cdot\frac{1}{g(x)}}$$ と変形する．

このとき，$\lim_{x\to a}\left\{\frac{1}{g(x)}-\frac{1}{f(x)}\right\}=\lim_{x\to a}\frac{1}{f(x)}\cdot\frac{1}{g(x)}=0$ となるため見かけ上 $\frac{0}{0}$ の形となり，ド・ロピタルの定理を用いることにより計算できる．

(4) **∞^0，0^0，1^∞ に関する不定形の極限値の計算方法について**

これら3つについては，指数が関係するため(2)や(3)の様な変形ではうまくいかない．そこで次の様に対数を取り考えることにする．

$$\log f(x)^{g(x)}=g(x)\times\log f(x)=\frac{\log f(x)}{\frac{1}{g(x)}}$$

すると，

∞^0，0^0 の場合，$\lim_{x\to a}|\log f(x)|=\lim_{x\to a}\frac{1}{g(x)}=\infty$

となるため見かけ上 $\frac{\infty}{\infty}$ の形となり，

1^∞ の場合，$\lim_{x\to a}|\log f(x)|=\lim_{x\to a}\frac{1}{g(x)}=0$

となるため見かけ上 $\frac{0}{0}$ の形となる．

よって，ド・ロピタルの定理を用いて計算でき，その結果，それぞれの場合において，$\lim_{x\to a}\log f(x)^{g(x)}$ の値 A が求められる．だから，上記3つの不定形の値を $\lim_{x\to a}f(x)^{g(x)}=e^A$ として得ることができる．

これは，有効な計算方法で[1]において，$\lim_{x\to 0}x^x$，$\lim_{x\to 0}x^{g(x)}$（ただし，$g(x)=\pm|\log x|^{-\frac{1}{2}}$）を求める計算をするときにも実質的には利用されている．

次に参考までに，以上4つのグループの例題をあげておく．

例題

(1)の例　$\lim_{x\to 1}\frac{x^2-1}{3x^2-2x+1}=\frac{1}{2}$

(2)の例　$\lim_{x\to\frac{\pi}{4}-0}\tan 2x\times\cos t\left(x+\frac{\pi}{4}\right)=\frac{1}{2}$

(3)の例　$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}(\tan x-\sec x)=0$

(4)の例　$\lim_{x\to+0}\left(\frac{1}{x}\right)^{\sin x}=1$

また，先に挙げた4つのグループにおいてド・ロピタルの定理を用いることができたことより興味深い次の事実を得る．つまり，少なくとも$\frac{0}{0}$等，7つの不定（実際には不定形の定義1，2でのA±B等も含まれる．）はすべて不定$\frac{0}{0}$に帰着することができるということである．したがって，不定の定義を最終的には次のように決定することができる．

> **不定形の定義3**
> 定数関数でない関数$f(x)$，$g(x)$が$\lim_{x\to a}f(x)=\lim_{x\to a}g(x)=0$となるならば，$\frac{f(x)}{g(x)}$を不定形という．

注意：先の4つのグループからおわかりのように，ここでの$f(x)$，$g(x)$は元の関数の逆関数あるいは対数をとった関数等になっている．したがって，表面上は，$\frac{0}{0}$であっても，実際には，1^∞等のような不定形も扱われていることになる．

第5節　$\lim_{n\to\infty} n^{\frac{1}{n}}$の計算（～[2]よりの引用～）

ここでは，[2]でも書かれているが，今後も入試問題で取り上げられると思われるので$\lim_{n\to\infty} n^{\frac{1}{n}}$の計算方針について簡潔に4つ紹介する（詳しくは[2]を見ていただきたい）．

解法1．　$1+n^{-\frac{1}{2}}>n^{\frac{1}{2n}}$より求める．　（東京工大）

解法2．　$1+2n^{-\frac{1}{2}}>n^{\frac{1}{n}}$より求める．　（京都産大）

解法3．　はさみうちの原理により証明する．

$1\leqq\lim_{n\to\infty}n^{\frac{1}{n}}=\lim_{n\to\infty}\exp(\log n^{\frac{1}{n}})\leqq\lim_{n\to\infty}\exp(n^{-\frac{1}{2}})=e^0=1$

解法4．　$\lim_{n\to\infty}\log n=\lim_{n\to\infty}n=\infty$であるから，ド・ロピタルの定理を利用できるので第4節(4)の手段により証明する

$$\lim_{n\to\infty}n^{\frac{1}{n}}=\lim_{n\to\infty}\exp(\log n^{\frac{1}{n}})=\lim_{n\to\infty}\exp\frac{\log n}{n}$$
$$=\lim_{n\to\infty}\exp\frac{(\log n)'}{n'}=\lim_{n\to\infty}e^{\frac{1}{n}}=e^0=1$$

解法1，2は，不等式として考えると$1+n^{-\frac{1}{2}}>n^{\frac{1}{2n}}$は，$1+2n^{-\frac{1}{2}}>n^{\frac{1}{n}}$よりも良い評価がなされていると考えられる．よって解法1は今後も学習されると思われる（実際，問題集でも解法1を取り上げているものは多いようである）．解法1～4を全て生徒に紹介するか否かは教師に任されていると思うが，不定形を学ぶとき$\lim_{n\to\infty}n^{\frac{1}{n}}$は教材として取り上げられるべきだとは思う．

第6節　まとめ

不定形の極限値の計算は是非生徒に定着させたい学習内容の1つである．しかしその定義について詳細に書かれた書物はあまりなく，漠然としかとらえられていないように思われる．そこでまず，教師自身が不定，不定形の定義をきちんととらえ，第3節であげたものが不定形であることを知り，第4節での有効な計算方法を理解しておくことは欠かせないことであろう．ただ，ド・ロピタルの定理は，高校の学習範囲外であり当然のように用いることができないのが残念である（よって，はさみうちの原理等が必要となる）．しかし，紹介程度にでも生徒にド・ロピタルの定理を提示し，第4節の内容を理解させることは，生徒の興味を引き，学習の手助けになるのではないかと考えられる．

最後になったが，この小稿の完成にあたっては大阪教育大学大学院生の志藤真裕君に大変お世話になった．特に，第2節の完成は，彼の協力なしにはありえなかったであろう．ここに深く感謝の意を表したい．

参　考　文　献

[1]　栗田稔　$0^0=1$と言っていいか　数学セミナー　1997年9月号　日本評論社　p.38
[2]　塩見浩三　教材研究（微積学）∞^0，0^0について　数研通信第16号　数研出版　pp.2―3
[3]　寺田文行　サイエンスライブラリ演習数学＝3　演習 微分積分　サイエンス社（1975年6月5日）p.35
[4]　難波誠　数学シリーズ 微分積分学　裳華房（1996年12月5日）pp.65―69
[5]　矢野健太郎　モノグラフ24　公式集　科学新興社（1969年6月10日）p.187，p.223
[6]　日本数学会　数学辞典　第2版　岩波書店（1968年6月25日）p.29

（奈良県育英西中学高等学校）