π の近似について

遠藤　一成（えんどう　かずなり）

1 はじめに

微分積分学の一応用として円周率 π を表現する公式をテーマにした入試問題を散見することができる．本稿では，以下の 4 つの近似計算についてまとめることを目的とする．

(1) ライプニッツの級数

$$\frac{\pi}{4}=1-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}+\cdots\cdots$$

(2) ウォリスの公式

$$\frac{\pi}{2}=\lim_{n\to\infty}\frac{2\cdot2}{1\cdot3}\cdot\frac{4\cdot4}{3\cdot5}\cdot\frac{6\cdot6}{5\cdot7}\cdot\cdots\cdots\cdot\frac{2n\cdot2n}{(2n-1)(2n+1)}$$

(3) ヴィエタの無限級数

$$\frac{2}{\pi}=\prod_{n=2}^{\infty}\cos\frac{\pi}{2^n}$$

$$=\sqrt{\frac{1}{2}}\cdot\sqrt{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2}}}\cdot\sqrt{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2}}}}\cdots$$

(4) 原点が中心，半径 n の円の周上または内部にある格子点の個数を a_n とするとき

$$\pi=\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{n^2}$$

2 ライプニッツの級数

東京医科歯科大学で出題された次の入試問題はライプニッツの級数の証明そのものである．

> n を正の整数とするとき，次の問いに答えよ．
>
> (1) $S_n=\displaystyle\int_0^1\frac{1-(-x^2)^n}{1+x^2}dx$ の値を求めよ．
>
> (2) $\left|S_n-\displaystyle\int_0^1\frac{dx}{1+x^2}\right|\leqq\dfrac{1}{2n+1}$ であることを示せ．
>
> (3) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}S_n$ の値を求めよ．

証明 (1) $\dfrac{1-(-x^2)^n}{1+x^2}$ は初項 1，公比 $-x^2$ の等比数列の初項から第 n 項までの和なので

$$S_n=\int_0^1\sum_{k=1}^{n}(-x^2)^{k-1}dx=\sum_{k=1}^{n}(-1)^{k-1}\int_0^1x^{2k-2}dx$$

$$=\sum_{k=1}^{n}\frac{(-1)^{k-1}}{2k-1}$$

(2) $\displaystyle(\text{左辺})=\left|\int_0^1\frac{1-(-x^2)^n}{1+x^2}dx-\int_0^1\frac{dx}{1+x^2}\right|$

$$=\left|\int_0^1\frac{-(-x^2)^n}{1+x^2}dx\right|=\int_0^1\frac{x^{2n}}{1+x^2}dx$$

$$\leqq\int_0^1x^{2n}dx=\frac{1}{2n+1}$$

(3) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{1}{2n+1}=0$ だから，(2)より

$$\lim_{n\to\infty}S_n=\int_0^1\frac{dx}{1+x^2}=\frac{\pi}{4}$$

(1)(3)より

$$1-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}+\cdots\cdots=\frac{\pi}{4}$$

であることがわかる．

3 ウォリスの公式

平成 10 年度慶応大学理工学部で出題された次の問題の誘導に従ってウォリスの公式を導き出そう．

> 自然数 $n=1,\ 2,\ 3\cdots\cdots$ に対して定積分
>
> $$S_n=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^n x\,dx$$
>
> を考える．S_1，S_2 を計算して
>
> $S_1=1$，$S_2=\boxed{(カ)}$ …… (1)
>
> を得る．また，部分積分法を用いて，漸化式
>
> $S_{n+2}=\boxed{(キ)}\,S_n$ …… (2)
>
> を得る．したがって，(1)と(2)から S_n を求めることができる．また
>
> $S_{2n}S_{2n+1}=\boxed{(ク)}$ …… (3)
>
> が成り立つ．$S_{n+1}<S_n$ であることと，(2)により
>
> $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{S_{n+1}}{S_n}=\boxed{(ケ)}$ …… (4)
>
> を得る．(3)と(4)から
>
> $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\sqrt{n}\,S_n=\boxed{(コ)}$ …… (5)
>
> が成り立つことがわかる．

証明 (1) $S_2=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^2 x\,dx$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{1-\cos 2x}{2}dx$$

$$=\frac{1}{2}\left[x-\frac{1}{2}\sin 2x\right]_0^{\frac{\pi}{2}}=\frac{\pi}{4}$$

(2) $S_{n+2}=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^{n+2}x\,dx$

$$=\left[-\cos x\cdot\sin^{n+1}x\right]_0^{\frac{\pi}{2}}$$

$$+(n+1)\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^n x\cos^2 x\,dx$$

$$=(n+1)\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^n x(1-\sin^2 x)dx$$

$$=(n+1)(S_n-S_{n+2})$$

よって $S_{n+2}=\dfrac{n+1}{n+2}S_n$

(3) (2)より

$$S_{2n}=\frac{2n-1}{2n}\cdot\frac{2n-3}{2n-2}\cdot\cdots\cdots\cdot\frac{5}{6}\cdot\frac{3}{4}\cdot S_2$$

$$S_{2n+1}=\frac{2n}{2n+1}\cdot\frac{2n-2}{2n-1}\cdot\cdots\cdots\cdot\frac{4}{5}\cdot\frac{2}{3}\cdot S_1$$

したがって，辺々をかけると

$$S_{2n}\cdot S_{2n+1}=\frac{2}{2n+1}\times S_2S_1=\frac{\pi}{2(2n+1)}$$

(4) $0\leqq x\leqq\dfrac{\pi}{2}$ において

$$0\leqq\sin^{n+2}x\leqq\sin^{n+1}x\leqq\sin^n x$$

が成り立つので

$$0<S_{n+2}<S_{n+1}<S_n$$

$$\frac{S_{n+2}}{S_n}<\frac{S_{n+1}}{S_n}<1$$

(2)より $\dfrac{n+1}{n+2}<\dfrac{S_{n+1}}{S_n}<1$

$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{n+1}{n+2}=1$ であるから，はさみうちの原理より

$$\lim_{n\to\infty}\frac{S_{n+1}}{S_n}=1$$

(5) $n=2m+1$ のとき

$$\lim_{n\to\infty}nS_n{}^2=\lim_{m\to\infty}(2m+1)S^2{}_{2m+1}$$

$$=\lim_{m\to\infty}(2m+1)S_{2m+1}S_{2m}\times\frac{S_{2m+1}}{S_{2m}}$$

$$=\lim_{m\to\infty}\frac{(2m+1)\pi}{2(2m+1)}\times\frac{S_{2m+1}}{S_{2m}}$$

$$=\frac{\pi}{2}$$

このようにして，

$$\lim_{n\to\infty}\left\{\frac{2\cdot4\cdot6\cdots\cdots(2n-2)\cdot2n}{1\cdot3\cdot5\cdots\cdots(2n-3)\cdot(2n-1)}\right\}^2\frac{1}{2n+1}=\frac{\pi}{2}$$

が得られる．

4 ヴィエタの無限級数

半径 1 の円に内接する正 2^{n+1} 角形の面積を S_n とすれば

$$S_n=\frac{1}{2}\times\sin\frac{2\pi}{2^{n+1}}\times2^{n+1}$$

であり，

$$\lim_{n\to\infty}S_n=\lim_{n\to\infty}\frac{\sin\frac{\pi}{2^n}}{\frac{\pi}{2^n}}\times\pi=\pi$$

また，数列 $\{a_n\}$ を $a_1=\cos\dfrac{\pi}{2}$，$a_{n+1}=\sqrt{\dfrac{1+a_n}{2}}$ で定義するとき，半角の公式 $\cos\theta=\sqrt{\dfrac{1+\cos 2\theta}{2}}$ より，$a_n=\cos\dfrac{\pi}{2^n}$ となる．そこで

$$a_2\cdots\cdots a_{n-1}a_nS_n$$

$$=a_2\cdots\cdots a_{n-1}\times\cos\frac{\pi}{2^n}\times\sin\frac{\pi}{2^n}\times2^n$$

$$=a_2\cdots\cdots a_{n-1}\times\sin\frac{\pi}{2^{n-1}}\times2^{n-1}$$

$$\vdots$$

$$=a_2\times\sin\frac{\pi}{2^2}\times2^2=\cos\frac{\pi}{4}\times\cos\frac{\pi}{4}\times2^2$$

$$=2$$

つまり $\dfrac{2}{S_n}=a_2a_3\cdots\cdots a_n=\displaystyle\prod_{k=2}^{n}\cos\frac{\pi}{2^k}$

$n\to\infty$ とすれば

$$\frac{2}{\pi}=\prod_{n=2}^{\infty}\cos\frac{\pi}{2^n}$$

更に

$$\cos\frac{\pi}{2^2}=\sqrt{\frac{1}{2}}$$

$$\cos\frac{\pi}{2^3}=\sqrt{\frac{1}{2}\left(1+\cos\frac{\pi}{2^2}\right)}=\sqrt{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2}}}$$

$$\cos\frac{\pi}{2^4}=\sqrt{\frac{1}{2}\left(1+\cos\frac{\pi}{2^3}\right)}$$

$$=\sqrt{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2}}}}$$

等を用いて

$$\frac{2}{\pi}=\sqrt{\frac{1}{2}}\sqrt{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2}}}\sqrt{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2}}}}\cdots$$

を得る．

5 格子点問題としての近似

平成10年度東京大学，京都大学入試では格子点問題，つまり与えられた領域内における格子点の分布の状態を調べる問題が出題された．本章ではこの考え方を用いて円周率 π の近似式を求める．

補題　n が2以上の自然数のとき

$$\frac{\pi}{4}(n-1)^2<\sum_{k=1}^{n}\sqrt{n^2-k^2}<\frac{\pi}{4}n^2$$

が成り立つ．

証明　$0\leqq k\leqq n-1$ のとき

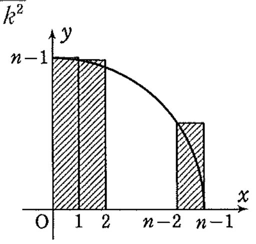
$n^2-(k+1)^2-\{(n-1)^2-k^2\}=2(n-k-1)\geqq 0$

であることに注意して，右上図より

$$\frac{\pi}{4}(n-1)^2<\sum_{k=0}^{n-1}\sqrt{(n-1)^2-k^2}$$

$$<\sum_{k=0}^{n-1}\sqrt{n^2-(k+1)^2}$$

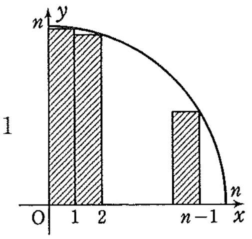
$$=\sum_{k=1}^{n}\sqrt{n^2-k^2}$$



右下図より

$$<\frac{\pi}{4}n^2$$

中心が原点，半径 n の円の周上または内部にある格子点の個数を a_n とすると



$$a_n=4\sum_{k=1}^{n}[\sqrt{n^2-k^2}]+4n+1$$

である．ここで，ガウス記号[　]の定義より

$$\sqrt{n^2-k^2}-1<[\sqrt{n^2-k^2}]$$

$$\leqq\sqrt{n^2-k^2}$$

したがって

$$4\sum_{k=1}^{n}(\sqrt{n^2-k^2}-1)+4n+1<a_n$$

$$\leqq 4\sum_{k=1}^{n}\sqrt{n^2-k^2}+4n+1$$

補題より

$$4\times\frac{\pi}{4}(n-1)^2+1<a_n\leqq 4\times\frac{\pi}{4}n^2+4n+1$$

$$\pi\left(1-\frac{1}{n}\right)^2+\frac{1}{n^2}<\frac{a_n}{n^2}<\pi+\frac{4n+1}{n^2}$$

$\lim_{n\to\infty}$(左辺)$=\lim_{n\to\infty}$(右辺)$=\pi$ なので

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{n^2}=\pi$$

を得る．

6 おわりに

オイラーの級数

$$\frac{\pi^2}{6}=1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{4^2}+\cdots\cdots$$

を高校生レベルの微分積分学を用いて証明を試みたが筆者の研究不足のため，証明は完成していません．ただし

$$\frac{\pi^2}{6}\geqq 1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{4^2}+\cdots\cdots$$

はフーリエ級数の考え方を用いて次のように証明できる．$\frac{1}{\sqrt{\pi}}\sin nx=f_n(x)$ とおくと

$$\int_{-\pi}^{\pi}f_m(x)f_n(x)dx=\begin{cases}1 & (m=n\text{ のとき})\\ 0 & (m\neq n\text{ のとき})\end{cases}$$

である．

また，$\int_{-\pi}^{\pi}xf_n(x)dx=c_n$ とおくと，部分積分法により $c_n=\frac{2(-1)^{n+1}\sqrt{\pi}}{n}$ である．そして，任意の自然数 n に対して

$$0\leqq\int_{-\pi}^{\pi}\{x-\sum_{k=1}^{n}c_kf_k(2)\}^2dx$$

$$=\int_{-\pi}^{\pi}x^2dx-2\sum_{k=1}^{n}c_k\int_{-\pi}^{\pi}xf_k(x)dx$$

$$+\sum_{k=1}^{n}c_k{}^2\int_{-\pi}^{\pi}f_k{}^2(x)dx$$

$$=\frac{2}{3}\pi^3-\sum_{k=1}^{n}c_k{}^2=\frac{2}{3}\pi^3-4\pi\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k^2}$$

$$=4\pi\left(\frac{\pi^2}{6}-\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k^2}\right)$$

したがって，すべての自然数 n に対して

$$\frac{\pi^2}{6}\geqq 1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\cdots\cdots+\frac{1}{n^2}$$

が成立するので　$n\to\infty$ として

$$\frac{\pi^2}{6}\geqq 1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\cdots\cdots+\frac{1}{n^2}+\cdots\cdots$$

を得る．

参考文献

自然にひそむ数学　(佐藤修一著)　講談社

(愛知県滝高等学校)