美しいピタゴラス数

君島(きみじま)　巖(いわお)

再びピタゴラス数 ($x^2+y^2=z^2$ の自然数解) を話題にしたいと思います．何はともあれ次の表 1，表 2 を見て頂きたい．

表　1

x	y	z
3	4	5
5	12	13
7	24	25
9	40	41
11	60	61
13	84	85
15	112	113
……	……	……

表　2

	x	y	z
※	4	3	5
	6	8	10
※	8	15	17
	10	24	26
※	12	35	37
	14	48	50
※	16	63	65
	……	……	……

御覧のように，表 1 では x は連続した奇数であり，更に y と z の差はすべて 1 である．ということは，これらのピタゴラス数の組はすべて互いに素ということです．

次に表 2 では，x は連続した偶数です．また y と z の差は常に 2 である．そして 1 つおきに互いに素 (※の所) が現われます．

以下では，どうしてこのようになるのか，3 つの方法で説明を試みたい．

☆　表 1 の説明　その 1

$z=n+1$ (n は自然数)，$y=n$ とする．

$x^2+n^2=(n+1)^2$ より　$x^2=2n+1$ …… ①

$n=\dfrac{x^2-1}{2}$ となり明らかに x は奇数でなければならない．$x=2m+1$ とおくと，

$$n=\frac{(2m+1)^2-1}{2}=2m^2+2m$$

◦ $m=1$ のとき　$n=4$　∴　$x=3$，$y=4$，$z=5$

◦ $m=2$ のとき　$n=12$　∴　$x=5$．$y=12$，$z=13$

……………

以下，同様にして表 1 が得られる．

☆　表 1 の説明　その 2

どの数論の本にもピタゴラス数の求め方に関する次の式が載っております．

$$\begin{aligned} &x=a^2-b^2 \quad (a,\ b)=1 \\ &y=2ab \\ &z=a^2+b^2 \end{aligned}$$

これを使ってみましょう．

さて　$z-y=a^2+b^2-2ab=(a-b)^2$ より

$a-b=1$ の組を用いる．

◦ $a=2$，$b=1$ のとき

上の式を用いて　$x=3$，$y=4$，$z=5$

◦ $a=3$，$b=2$ のとき

$x=5$，$y=12$，$z=13$

◦ $a=4$，$b=3$ のとき

$x=7$，$y=24$，$z=25$

☆　表 1 の説明　その 3

前の投稿のとき，次の式はピタゴラス数に関するすべての解が含まれることを示した．

$$\begin{aligned} &x=2m+\alpha \quad \text{ただし} \quad \alpha\beta=2m^2 \\ &y=2m+\beta \quad \alpha,\ \beta,\ m \text{ は自然数} \\ &z=2m+\alpha+\beta \end{aligned}$$

◦ $m=1$ のとき　$\alpha\beta=2$　∴　$\alpha=1$，$\beta=2$

$x=3$，　$y=4$，　$z=5$

◦ $m=2$ のとき

$\alpha\beta=8$　　∴　$\alpha=1$，$\beta=8$

$x=5$，　$y=12$，　$z=13$

◦ $m=3$ のとき

$\alpha\beta=18$　　∴　$\alpha=1$，$\beta=18$

$x=7$，　$y=24$，　$z=25$

……………

このように $\alpha\beta=2m^2$ で $\alpha=1$，$\beta=2m^2$ とすると表 1 のタイプになる．

次に表 2 の説明をしよう．

☆　表2の説明　その1

$z=n+2$,　$y=n$ とする.

$x^2+n^2=(n+2)^2$ より　　$x^2=4n+4$ …… ①

$n=\dfrac{x^2-4}{4}$

明らかに x は偶数でなければならない.

$\therefore\ x=2m\qquad n=m^2-1$

∘ $m=2$ のとき　$x=4$, $y=3$, $z=5$

∘ $m=3$ のとき　$x=6$, $y=8$, $z=10$

∘ $m=4$ のとき　$x=8$, $y=15$, $z=17$

……………

m が偶数のとき, x, y, z が互いに素となるのは明らかである.

☆　表2の説明　その2

再び公式

$$\boxed{\begin{array}{l} x=2ab \\ y=a^2-b^2\quad (a,\ b)=1 \\ z=a^2+b^2 \end{array}}$$

を用いる.

さて, $z-y=(a^2+b^2)-(a^2-b^2)=2b^2$ で $b=1$ とすると

$z-y=2$

∘ $a=2$, $b=1$ のとき

$x=4$,　$y=3$,　$z=5$　　は明らか.

∘ $a=3$, $b=1$ のとき

$x=6$,　$y=8$,　$z=10$

∘ $a=4$, $b=1$ のとき

$x=8$,　$y=15$,　$z=17$

……………

以下同様.

a が偶数で $b=1$ のとき, 互いに素な解となることもわかる.

☆　表2の説明　その3

前掲の公式

$$\boxed{\begin{array}{l} x=2m+\alpha \\ y=2m+\beta\quad \text{ただし}\quad \alpha\beta=2m^2 \\ z=2m+\alpha+\beta \end{array}}$$

による説明を試みる.

∘ $m=1$ のとき　$\alpha\beta=2$　$\therefore$　$\alpha=2$, $\beta=1$

したがって　$x=4$,　$y=3$,　$z=5$

∘ $m=2$ のとき　$\alpha\beta=8$　$\therefore$　$\alpha=2$, $\beta=4$

このとき　$x=6$,　$y=8$,　$z=10$

∘ $m=3$ のとき　$\alpha\beta=18$　$\therefore$　$\alpha=2$, $\beta=9$

$x=8$,　$y=15$,　$z=17$

……………

一般に, $\alpha\beta=2m^2$ で $\alpha=2$, $\beta=m^2$ のときがこの表2のタイプである.

(栃木県立黒磯南高等学校)