三角関数についての役に立たない公式（その2）

冨田（とみた） 一志（かずし）

5. 定理の証明 その1

さて，第4章の定理4* の証明に入ろう．まず，次の命題を証明し，それを利用して定理の証明を行なう．

命題5 $\sin(2n-1)t=f_n(\sin t)$,

$\cos(2n-1)t=g_n(\sin t)\cos t$

と表すことができる．ただし，f_n は $(2n-1)$ 次，g_n は $(2n-2)$ 次の t についての多項式である．

命題6 $\sin 2nt=f_n(\sin t)\cos t$,

$\cos 2nt=g_n(\sin t)$

と表すことができる．ただし，f_n は $(2n-1)$ 次，g_n は $2n$ 次の t についての多項式である．

ここでは，命題5のみ証明し，命題6の証明は読者の皆様の練習問題とする．

ついでに触れておけば，命題5，命題6いづれにしても定理4の証明には，sin の方の式しか使わない．それを両方 (sin と cos) を証明するのは数学的帰納法を機能させるため．片方のみでは帰納法がうまく機能しないのだ (まあ，細工をすればうまく行くのですが，そこまでして証明の形を崩したくないですから)．

何故，こんな式を思い付くか，について自分自身の体験として述べておこう．

現行の教育課程で，数学Bでやることになった de Moivre の定理．

$$(\cos t+i\sin t)^N=\cos Nt+i\sin Nt$$

において，左辺を2項定理で展開して，実数部分，虚数部分を比較すれば，$\sin(2n-1)t$ は，$\sin t$ の多項式で表せそうだということがわかる．

この議論を，厳密に，精密に行えば，命題5の証明も可能である (と思う．自信はない)．ここでは，数学的帰納法を用いて証明を与えておく．

証明 まず，n についての帰納法を用いて，命題5が高々 $(2n-1)$ 次，$(2n-2)$ 次の f_n，g_n を用いて表せることを示す．後で，それぞれが，丁度，$(2n-1)$ 次，$(2n-2)$ 次であることを示す．

1．$n=1$ のときは既に示した．

2．$n=k$ のとき正しい．つまり，

$$\sin(2k-1)t=f_k(\sin t),$$
$$\cos(2k-1)t=g_k(\sin t)\cos t$$

と2つの多項式 f_k〔$(2k-1)$ 次式〕，g_k〔$(2k-2)$ 次式〕を用いて表せたとする．

このとき，

$$\begin{aligned}&\sin(2k+1)t\\&=\sin(2k-1)t\cos 2t+\cos(2k-1)t\sin 2t\\&=f_k(\sin t)(1-2\sin^2 t)\\&\quad+g_k(\sin t)\cdot 2\sin t(1-\sin^2 t),\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}&\cos(2k+1)t\\&=\cos(2k-1)t\cos 2t-\sin(2k-1)t\sin 2t\\&=\{g_k(\sin t)(1-2\sin^2 t)+f_k(\sin t)\cdot 2\sin t\}\cos t\end{aligned}$$

であるから，

$$f_{k+1}(x)=f_k(x)(1-2x^2)+g_k(x)\cdot 2x(1-x^2) \tag{6}$$

$$g_{k+1}(x)=g_k(x)(1-2x^2)-f_k(x)\cdot 2x \tag{7}$$

とおけば，f_{k+1}，g_{k+1} はそれぞれ高々 $(2k+1)$ 次，$2k$ 次の多項式である．

よって，$n=k+1$ のときも示せたことになる．

以上からすべての自然数 n に対して，この命題が成り立っていることがわかる．

次に，f_n，g_n がそれぞれ丁度 $(2n-1)$ 次，$(2n-2)$ 次の多項式である，ことを示そう．

f_n の最高次〔$(2n-1)$ 次〕の係数を a_n，g_n の最高次〔$(2n-2)$ 次〕の係数を b_n とすると，先の等式(6)(7)によれば，

編集部注：この原稿は，数研通信34号からの続きです．そのため，章や命題や定理などの番号は，前号から引き続いたものになっています．

＊第4章の定理4

$$\prod_{k=1}^{N-1}\sin\frac{k}{N}\pi=\frac{N}{2^{N-1}}$$

$$a_{k+1}=-2a_k-2b_k,\ \ b_{k+1}=-2a_k-2b_k$$

先に示したことから，$a_1=b_1=1$ だから，

$$a_n=b_n=(-4)^{n-1} \tag{8}$$

であることがわかる．特に，f_n，g_n はそれぞれ丁度 $(2n-1)$ 次，$(2n-2)$ 次の多項式であることがわかった．

さて，このようにすれば，命題5を証明することができる．ところで，この命題であるが，実は，1991年度の東京大学(前期)，1996年度の京都大学(後期)の入学試験に似たような形で出題されている．

特に，京都大学の問題は，おそらく，第4章の等式(5)，つまり，定理4を想定しているのではないか．という気がする．理系の問題はまるっきりそのままである．

どうでもよいことはおいておいて，定理4の証明に入ろう．

証明　$\sin Nt$ について，$N=2n-1$ のとき，

$\sin(2n-1)t=0$ とすると，$0\leqq t<\dfrac{\pi}{2}$ として，

$0\leqq(2n-1)t<\dfrac{2n-1}{2}\pi$ であるから，

$$(2n-1)t=0,\ \pi,\ 2\pi,\ \cdots\cdots,\ (n-1)\pi$$

だから，先の命題5によれば，

$$\begin{aligned}
&\sin(2n-1)t\\
&=(-4)^{n-1}\sin t\left(\sin t-\sin\frac{\pi}{2n-1}\right)\\
&\times\left(\sin t-\sin\frac{2\pi}{2n-1}\right)\cdots\cdots\\
&\times\left\{\sin t-\sin\frac{(n-1)\pi}{2n-1}\right\}\\
&\times\left(\sin t+\sin\frac{\pi}{2n-1}\right)\\
&\times\left(\sin t+\sin\frac{2\pi}{2n-1}\right)\cdots\cdots\\
&\times\left\{\sin t+\sin\frac{(n-1)\pi}{2n-1}\right\}
\end{aligned}$$

ここで，両辺を $\sin t$ で割り，$t\to 0$ として，

$$\begin{aligned}
2n-1&=(-4)^{n-1}(-1)(n-1)\\
&\times\left\{\sin\frac{\pi}{2n-1}\sin\frac{2\pi}{2n-1}\cdots\cdots\sin\frac{(n-1)\pi}{2n-1}\right\}^2
\end{aligned}$$

$2n-1=N$ とおき換えれば，求める結果が得られる．

$N=2n$ のとき，$\sin 2nt=0$ とすると，$0\leqq t<\dfrac{\pi}{2}$ として，$0\leqq 2nt<n\pi$ であるから

$$2nt=0,\ \pi,\ 2\pi,\ \cdots\cdots,\ (n-1)\pi$$

だから，先の命題6によれば，

$$\begin{aligned}
&\sin 2nt\\
&=(-4)^{n-1}\sin t\cos t\left(\sin t-\sin\frac{\pi}{2n}\right)\\
&\times\left(\sin t-\sin\frac{2\pi}{2n}\right)\cdots\cdots\\
&\times\left\{\sin t-\sin\frac{(n-1)\pi}{2n}\right\}\\
&\times\left(\sin t+\sin\frac{\pi}{2n}\right)\left(\sin t+\sin\frac{2\pi}{2n}\right)\cdots\cdots\\
&\times\left\{\sin t+\sin\frac{(n-1)\pi}{2n}\right\}
\end{aligned}$$

ここで，両辺を $\sin t$ で割り，$t\to 0$ として，

$$\begin{aligned}
2n&=(-4)^{n-1}(-1)(n-1)\\
&\times\left\{\sin\frac{\pi}{2n}\sin\frac{2\pi}{2n}\cdots\cdots\sin\frac{(n-1)\pi}{2n}\right\}^2
\end{aligned}$$

$2n=N$ とおき換えれば，$\sin\dfrac{n\pi}{2n}=1$ だから求める結果が得られる．

先に触れた京都大学の問題ではないが，この定理4を示すキーは極限操作 $t\to 0$ ではなかろうか．これに気づけば(そこまでの計算ができていることが前提ではあるが)，後の流れ(特に数学的帰納法の部分)は簡単なように思われる．

1991年頃にはこのようにしてこの定理4を証明していい気になっていた．しかし，改めて思うに面倒くさい．命題5，命題6(これが2つあるのも面倒くさい)を帰納法(これは好きなのだが)を用いてまず示し，それを使って定理4を奇数のケースと偶数のケースに分けて証明する．何とも面倒くさくないか．こんなにきれいな式なのだから，もっとすっきりした証明があるはずだ．としばらく考えていたのであった．

そして……

6. 定理の証明 その2

第5章の終わりに書いたように，定理4の証明はできていたのだが，どこかすっきりしないものを感じていた．

そんなある日，参考文献[4]を手にいれた．1996年(3年前です)のことである．この本はどこかの教科書会社の機関誌みたいなものに紹介してあった．新課程(この言葉は実は変．現行課程とでも言おう

か）で複素数平面が復活し，複素数平面のことに疎い私は少しでも勉強しようと思い，洋書ではあるが，購入してみたのである．が，松江は田舎なのか，手に入るまでが長かったこと．まる3カ月は，かかったように思う．

それはさておき，この本の中の演習問題に，定理4が載っているのだ．しかも，ノーヒント（ウソでした．少しだけあります）．それはまあよいのだが，その少し前に次のような問題が載っている．これが面白そうではないか．そう思いませんか．

問題 4　Show that

$$\sin 2\theta=2\sin\theta\cos\theta,$$

$$\sin 3\theta=4\sin\theta\sin\left(\frac{\pi}{3}-\theta\right)\sin\left(\frac{\pi}{3}+\theta\right),$$

$$\sin 4\theta=8\sin\theta\cos\theta\sin\left(\frac{\pi}{4}-\theta\right)\sin\left(\frac{\pi}{4}+\theta\right),$$

$$\sin 5\theta=16\sin\theta\sin\left(\frac{\pi}{5}-\theta\right)\sin\left(\frac{2\pi}{5}-\theta\right)\times\sin\left(\frac{\pi}{5}+\theta\right)\sin\left(\frac{2\pi}{5}+\theta\right),$$

（以下続きますが省略します）

この問題を見てすぐに思ったこと．これは使える．そして，こんな式が成り立ちそうだと気づいたのであった．

予想

$$\sin n\theta=2^{n-1}\sin\theta\sin\left(\theta+\frac{\pi}{n}\right)\sin\left(\theta+\frac{2\pi}{n}\right)\times\sin\left(\theta+\frac{3\pi}{n}\right)\cdots\cdots\sin\left\{\theta+\frac{(n-1)\pi}{n}\right\}$$

この形になれば，先の問題が定理4に使えそうだということは明らかであろう．

さてこの予想だが，余りにも面倒くさそうで手をつけていない．まあ格好良さそうであるし，成り立ちそうな気はする．あるいは，この後で定理の別証明を行うが，それと同じようにするとできるかもしれない（無責任です）．

（なお，その後，この予想は正しいことが証明でき，予想は定理（？）となった．1997年11月頃のことです．by Tomita）

この予想はなんと言っても参考文献［4］から取ったもの．だから定理4の別証明は複素数を使って証明しなければならない．という脅迫観念のようなものが最初からあった．で，ついに証明できた．その日付は覚えていないが，寮の宿直の日であったことは確かである．

証明に入る前に少し複素数，三角関数，指数関数についての性質の確認をしておくことにする．

第2章の最初に触れたように実は指数関数は複素数に対しても定義される．特に純虚数に対しては次のような形になる．

θ を実数（実は実数でなくてよい）とするときに，

$$e^{i\theta}=\cos\theta+i\sin\theta$$

これを逆に考えれば（逆に解けば），

$$\cos\theta=\frac{e^{i\theta}+e^{-i\theta}}{2} \tag{9}$$

$$\sin\theta=\frac{e^{i\theta}-e^{-i\theta}}{2i} \tag{10}$$

となる．この事実（特に下の等式(10)）を以下の定理4の別証明で用いることになる．

証明　先の等式(10)を用いれば

$$\sin\frac{\pi}{n}\sin\frac{2\pi}{n}\sin\frac{3\pi}{n}\cdots\cdots\sin\frac{(n-1)\pi}{n}$$

$$=\left(\frac{e^{i\frac{\pi}{n}}-e^{-i\frac{\pi}{n}}}{2i}\right)\left(\frac{e^{i\frac{2\pi}{n}}-e^{-i\frac{2\pi}{n}}}{2i}\right)\left(\frac{e^{i\frac{3\pi}{n}}-e^{-i\frac{3\pi}{n}}}{2i}\right)\cdots\cdots\times\left\{\frac{e^{i\frac{(n-1)\pi}{n}}-e^{-i\frac{(n-1)\pi}{n}}}{2i}\right\}$$

$$=\exp\left(i\frac{\pi}{n}\{1+2+3+\cdots+(n-1)\}\right)\times\frac{1}{(2i)^{n-1}}\prod_{k=1}^{n-1}\left(1-e^{-i2\pi\frac{k}{n}}\right)$$

ここで，各 $k(1\leqq k\leqq n-1)$ に対して，$e^{-i2\pi\frac{k}{n}}$ は1以外の全ての1の n 乗根になるから，

1の n 乗根の方程式が $x^n-1=0$ であり，この解から1を除いたものを解にもつ方程式が $x^{n-1}+x^{n-2}+\cdots\cdots+1=0$，になることに気づけば，

$$\prod_{k=1}^{n-1}\left(1-e^{-i2\pi\frac{k}{n}}\right)=n$$

よって，

$$\sin\frac{\pi}{n}\sin\frac{2\pi}{n}\sin\frac{3\pi}{n}\cdots\cdots\sin\frac{(n-1)\pi}{n}$$

$$=\exp\left(i\frac{\pi}{n}\frac{n(n-1)}{2}\right)\frac{1}{(2i)^{n-1}}n$$

$$=\left(e^{i\frac{\pi}{2}}\right)^{n-1}\frac{1}{(2i)^{n-1}}n=(i)^{n-1}\frac{1}{(2i)^{n-1}}n=\frac{n}{2^{n-1}}$$

どうでしょうか．このようにするとすっきり行くような気がしませんか．第5章で行った証明と比較すると，非常にすっきりしているような気がするのですが．複素数を使うメリット．指数関数と三角関数が複素数を通じて，1つに表現できるという美し

さ．そう言ったものが，この証明には凝縮されているような気がします．

7．最後のアガキ

さて，三角関数の役に立たない，こう言い切るとかわいそう（何が，あるいは誰が）なので，役に立ちそうにない，と言っておこうか．そういう公式．これについて，現在，私が持っているものについて述べてきたのであるが，どんな感想をお持ちになったであろうか．

ほんとに役に立ちそうにないものばっかりよく集めたな．

暇人じゃないの．

何でもよいのです．これはほとんど自己満足の世界に浸りながら，書いた（実は打ったのだが）ものですから．

自己満足ついでに，もう少し蛇足を述べておく．

定理4は役に立つのか．こういう疑問がまず生じる．これについては，この文章に挙げた他の公式同様役に立たないとしか答えられない（情けないけど）．ただ個人的にこの定理4には思いいれがあり，何か一般的な現象の表れのような気がする．例えば，ある線型写像のノルムを計算すると左辺が出てきて，その線型写像の意味を考えると右辺が出て来るのは当り前だとか……．

あるいは（ほとんど同じことですけど），ある線型作用素（可能性としては積分作用素，あるいは，ラプラシアンかな）の固有値として，

$\sin\frac{k}{n}\pi(1\leqq k\leqq n-1)$ が出て来る．

なんて夢のようなことを考えているのだが，ただの嘘言である．

この文章を読んでのご意見ご感想をお聞かせ下さい．宛先は郵便番号690-0872，島根県松江市奥谷町164です．たくさんのお手紙お待ち申し上げております．

この文章は島根県立松江北高等学校の研究紀要（1997年度版）に掲載（予定）した文章から削除，訂正したものである．かなりの部分を削除したため，証明等詳細を多くの部分で省略しました．詳しくは，島根県立松江北高等学校の研究紀要（1997年度版）を参考にして下さい．

〈参 考 文 献〉

[1] 高等学校 数学II：啓林館

[2] チャート 解法と演習 数学II：数研出版

[3] スタンダード 数学II：数研出版

[4] Liang-shin Hahn：*Complex Numbers and Geometry*：The Mathematical Association of America

[5] 成木 勇夫 訳：数（上）：シュプリンガー・フェアラーク東京

[6] 高橋 礼司：複素解析：東京大学出版会

（島根県立松江北高等学校）