$\displaystyle\int_\alpha^\beta(x-\alpha)^m(x-\beta)^n dx$ について

早川（はやかわ） 佳史（よしふみ）

1. 発端

数学IIIの置換積分法の授業で

$$\int_1^2(x-1)^2(x-2)^2dx$$

という問題を扱った．これはもちろん

$$\begin{aligned}\int_1^2(x-1)^2(x-2)^2dx &=\int_0^1 t^2(t-1)^2dt\\ &=\int_0^1(t^4-2t^3+t^2)dt\\ &=\frac{1}{30}\end{aligned}$$

となるが，次のような疑問をもった．それは，

$$\int_\alpha^\beta(x-\alpha)(x-\beta)dx=-\frac{(\beta-\alpha)^3}{6}$$

や

$$\int_\alpha^\beta(x-\alpha)^2(x-\beta)dx=-\frac{(\beta-\alpha)^4}{12}$$

という公式はよく知られているが，一般的な

$$\int_\alpha^\beta(x-\alpha)^m(x-\beta)^n dx$$

という積分に対しては公式があるのだろうか，というものである．

そして，以下に示すような結論を得た．

2. 置換積分 $\left(\int_\alpha^\beta \text{を} \int_0^1 \text{にする}\right)$

$I=\displaystyle\int_\alpha^\beta(x-\alpha)^m(x-\beta)^n dx$ とする．

$x-\alpha=u$ として

$dx=du$

x	α	$\cdots$	β
u	0	$\cdots$	$\beta-\alpha$

であることから

$$I=\int_0^{\beta-\alpha}u^m(u-\beta+\alpha)^n du$$

$a=\beta-\alpha$ として

$$I=\int_0^a u^m(u-a)^n du$$

更に $u=at$ とする．

$du=adt$

u	0	$\cdots$	a
t	0	$\cdots$	1

であることから

$$\begin{aligned}I&=\int_0^1(at)^m(at-a)^n adt\\ &=a^{m+n+1}\int_0^1 t^m(t-1)^n dt\end{aligned}$$

3. 部分積分

$I_{m,n}=\displaystyle\int_0^1 t^m(t-1)^n dt$ とする．

$$\begin{aligned}I_{m,n}&=\int_0^1\left(\frac{1}{m+1}t^{m+1}\right)'(t-1)^n dt\\ &=\left[\frac{1}{m+1}t^{m+1}(t-1)^n\right]_0^1\\ &\qquad-\int_0^1\frac{1}{m+1}t^{m+1}n(t-1)^{n-1}dt\\ &=\frac{(-1)n}{m+1}\int_0^1 t^{m+1}(t-1)^{n-1}dt\\ &=\frac{(-1)n}{m+1}I_{m+1,n-1}\end{aligned}$$

同様にして

$$\begin{aligned}I_{m,n}&=\frac{(-1)n}{m+1}\cdot\frac{(-1)(n-1)}{m+2}I_{m+2,n-2}\\ &=\frac{(-1)^2n(n-1)}{(m+1)(m+2)}I_{m+2,n-2}\end{aligned}$$

帰納的に考えて

$$\begin{aligned}I_{m,n}&=\frac{(-1)^n n(n-1)\cdots 1}{(m+1)(m+2)\cdots(m+n)}I_{m+n,0}\\ &=\frac{(-1)^n n!\,m!}{(m+n)!}I_{m+n,0}\end{aligned}$$

となり

$$I_{m+n,0}=\int_0^1 t^{m+n}dt$$
$$=\left[\frac{t^{m+n+1}}{m+n+1}\right]_0^1$$
$$=\frac{1}{m+n+1}$$

であることより

$$I_{m,n}=\frac{(-1)^n n!\,m!}{(m+n+1)(m+n)!}$$

となるが

$$_{m+n}\mathrm{C}_m=\frac{(m+n)!}{m!\,n!}$$

であることから

$$I_{m,n}=\frac{(-1)^n}{(m+n+1)_{m+n}\mathrm{C}_m}$$

つまり

$$\int_0^1 t^m(t-1)^n dt=\frac{(-1)^n}{(m+n+1)_{m+n}\mathrm{C}_m}$$

4. 結論

$$I=\int_\alpha^\beta (x-\alpha)^m(x-\beta)^n dx$$

は，$a=\beta-\alpha$ として

$$I=a^{m+n+1}\int_0^1 t^m(t-1)^n dt$$
$$=a^{m+n+1}\frac{(-1)^n m!\,n!}{(m+n+1)(m+n)!}$$
$$=a^{m+n+1}\frac{(-1)^n}{(m+n+1)_{m+n}\mathrm{C}_m}$$

つまり

$$\int_\alpha^\beta (x-\alpha)^m(x-\beta)^n dx=\frac{(-1)^n(\beta-\alpha)^{m+n+1}}{(m+n+1)_{m+n}\mathrm{C}_m}$$

である．

5. 補足

高校の数学の範囲を逸脱するが，B(ベータ)関数とΓ(ガンマ)関数を用いて次のようにしても$I_{m,n}$が求められる．

自然数 m，n に対して

$$B(m,\ n)=\int_0^1 t^{m-1}(1-t)^{n-1}dt$$
$$\Gamma(m)=(m-1)!$$

であり，

$$B(m,\ n)=\frac{\Gamma(m)\Gamma(n)}{\Gamma(m+n)}$$

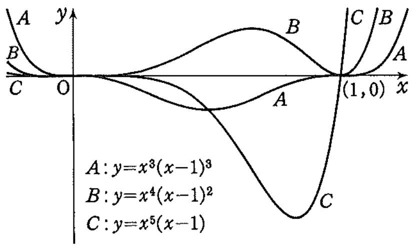
という関係式が成立する．

このことを用いれば

$$I_{m,n}=\int_0^1 t^m\{-(1-t)\}^n dt$$
$$=(-1)^n\int_0^1 t^m(1-t)^n dt$$
$$=(-1)^n B(m+1,\ n+1)$$
$$=(-1)^n\frac{\Gamma(m+1)\Gamma(n+1)}{\Gamma(m+n+2)}$$
$$=(-1)^n\frac{m!\,n!}{(m+n+1)!}$$
$$=\frac{(-1)^n m!\,n!}{(m+n+1)(m+n)!}$$
$$=\frac{(-1)^n}{(m+n+1)_{m+n}\mathrm{C}_m}$$

6. 例

$m+n=6$，$\alpha=0$，$\beta=1$ の場合について例を示す．積分の値の符号が n の偶奇によることや，$m+n$ が一定ならば $|m-n|$ が大きくなるほど積分の値の絶対値も大きくなることがグラフからも分かる．



$$\int_0^1 x^3(x-1)^3dx=\frac{(-1)^3}{7_6\mathrm{C}_3}=-\frac{1}{140}$$
$$\int_0^1 x^4(x-1)^2dx=\frac{(-1)^2}{7_6\mathrm{C}_2}=\frac{1}{105}$$
$$\int_0^1 x^5(x-1)dx=\frac{(-1)^1}{7_6\mathrm{C}_1}=-\frac{1}{42}$$

(愛知県立安城東高等学校)