$f(x+1)-f(x)$ の効用（その1）

和分・差分・漸化式を高校数学の１つのコンセプトに

石橋（いしばし）　信夫（のぶお）

1. プロローグ

このレポートを書くきっかけとなったのは次の3点である．

(1) ばらばらな項目に1つのコンセプトをもたせたい

現行の指導要領あるいは2003年からの指導要領を見ると項目，内容ともに目減りが激しく40台半ばの教師として寂しさを感じる．ただ雑然と並んでいて「その中から自由に選びなさい」は量が多いときはいいが，少なくなった場合は別の発想が必要になるのではないか．例えるならば，目減りしつつある雑多な材料を並べておくのではなく，小麦粉，バター，卵などケーキの材料だけを集め，ケーキを作ってしまってはどうかという提案である．元東京大学教授の竹内均氏が初めて地学の教科書を書くにあたってプレートテクトニクスを中心に据えたとのことである．また最近数学教育に示唆を与えてくれる認知心理学も知識の構造化（概念や命題の間の関係を明らかにすること）を力説し，それによる知識の節約を勧めている．

では何をコンセプトにすればよいのか．もちろん1つにまとめあげる程に数学は単純ではないが，私は局所的性質から大局的性質にもっていくことにしたい．漸化式や微分方程式，平均値の定理などがこれにあたる．ここで漸化式の基本である隣どうしの差をとることに着目したい．今まで関数は原点中心にとらえられてきたが差分を考えれば，1次～3次などの整関数はすぐに結びつくし，階差数列あるいはテーラー展開のヒントにもなったニュートンの補完法を用いればすぐに元の関数が求められる．differential（微分）の語源は difference（差）からきている．また定積分で大切な微積分学の基本定理も階差数列の和の公式から類推できるし，現にライプニッツはそうしたのである．差をとって考えていくことは場合の数やコンピュータのプログラミング，また線形の漸化式を解くことで線形代数とも繋がる．

(2) 理論重視の視点に量を入れた実学重視の視点も取り入れる

無限を柱とする微分積分と有限で離散的な量を扱う和分差分は歴史的に互いに補完しあってきた．しかし19世紀以降微分積分から量が追放され理論中心の体系となった．例えば，積分は逆接線法としての原始関数（関数）と従来からあった求積法としての不定積分（量）とが結びついたもので，そのなごりを高校数学でも引きずっている．

高校数学を学んで数学そのものを職業にする人よりは，工学，経済学などでそれを用いる人の方が多い．例えば，数学的手法で解ける微分方程式は貴重な例外であって，工学では格子点上の差分方程式として近似計算をし求めるのが一般的手法である．経済学でも離散的な時間を変数にフローとストックの関係をとらえていく場合が多いので差分方程式が威力を発揮する．

高校数学でも無限を教える前に，数列と和分差分の量を主体とした知識をもってくれば微分積分にスムーズに繋がっていくのではないか．

(3) プログラムの中にもっと有限数学の教材を

現在の数Cのプログラミングはニュートン法などの解析的教材が主である．もっと漸化式を用いた場合の数や確率の教材でしかも日常的で興味関心をひく教材を入れた方が自然ではないか．またプログラミングの基本は A＝A＋1 のように次の項との差を意識する事にあると思う．

以下の内容は初めに差分，和分の基礎知識，次にそれをもとにした関数，微分積分，場合の数，場合の数についての漸化式と続く．

2. 差分法の基礎知識

(1) 差分とずらしの定義

$\Delta f(x)=f(x+1)-f(x)$ を前進差分

$\nabla f(x)=f(x)-f(x-1)$ を後進差分と定義する

Δ を1階前進差分演算子（以下1階差分演算子と呼ぶ）例えば

$$\begin{aligned}\Delta(\Delta f(x))&=\Delta(f(x+1)-f(x))\\&=\Delta f(x+1)-\Delta f(x)\\&=f(x+2)-f(x+1)-f(x+1)+f(x)\\&=f(x+2)-2f(x+1)+f(x)\end{aligned}$$

$\Delta\{aU(x)+bV(x)\}=a\Delta U(x)+b\Delta V(x)$ が成り立つことから，Δ は線形性を満たす．

$Ef(x)=f(x+1)$ と定義する．

E を f のずらし演算子と呼ぶ．

ここで，$\Delta f(x)=f(x+1)-f(x)=Ef(x)-f(x)$
$=(E-1)f(x)$ より

$\Delta=E-1$ $(E=\Delta+1)$ が成り立つ．

(2) 1階差分方程式の4つの基本形

(i) $f(x+1)-f(x)=b$（b は定数）のとき

$f(x)=c+bx$（c は定数）

x が連続ならば $f(x)$ は1次関数であり

$a_{n+1}-a_n=b$ とすれば等差数列である．

(ii) $f(x+1)-rf(x)=0$（r は0以外の定数）

$f(x)=cr^x$（c は定数）

x が連続ならば指数関数であり $a_{n+1}=ra_n$ とすれば等比数列である．

(iii) $f(x+1)-f(x)=R(x)$（$R(x)$ はある既知の関数）

$$f(x)=c+\sum_{k=0}^{x-1}R(k)\ \ (\text{ただし，}c=f(0))$$

(iv) $f(x+1)-A(x)f(x)=0$（$A(x)$ はある既知の関数）

$$f(x)=c\prod_{k=0}^{x-1}A(k)\ \ (\text{ただし，}c=f(0))$$

(3) 一般解と特解

$U(x)$ を未知関数，$A_0(x)$～$A_n(x)$ はともに0にならない関数とするとき

$$A_0(x)U(x+n)+A_1(x)U(x+n-1)+\cdots\cdots+A_n(x)U(x)=R(x)$$

ここで，$R(x)=0$ の場合は同次であるという．

この差分方程式の解は線形性より同次の解とこの方程式の特解の和となる．特解を求めるには，未定係数法などを用いる．

(4) 2階同次の定数係数の差分方程式と微分方程式

$\dfrac{d^2y}{dx^2}+a\dfrac{dy}{dx}+by=0$ …… ① と

$x_{n+2}+ax_{n+1}+bx_n=0$ …… ② は D を微分演算子，E をずらし演算子とすると①は

$(D^2+aD+b)f(x)=0$, ②は $(E^2+aE+b)f(x)=0$ となり特性方程式はともに $p^2+ap+b=0$ でその解を p_1，p_2 とする $(p_1\neq p_2)$ と

①の解は $c_1e^{p_1x}+c_2e^{p_2x}$,

②の解は $c_1{p_1}^n+c_2{p_2}^n$

$p_1=p_2$ のときは

①の解は $(c_1+c_2x)e^{p_1x}$，②の解は $(c_1+c_2n){p_1}^n$

ここで，p_1，p_2 は虚数でも成り立つが，三角関数で表す方が周期性が見えてくる．

(5) 実際の2階線形の漸化式の解法と固有値

$x_{n+2}-8x_{n+1}+15x_n=A(x)$ …… ①

$x_{n+2}-8x_{n+1}+15x_n=0$ …… ②

①の解は②の解と①の特解の和で表される．

②は $(E^2-8E+15)x_n=0$ より特性方程式を用いると $p^2-8p+15=0$ より $p=5$，$p=3$ となり

②の解は $c_15^n+c_23^n$

ここで①，②を線形代数の見地から見直し，特性方程式を用いた方法と比べてみる．

②の数列の番号を1つずらす変換を T（その表現行列を E）とする．基底 $B=\langle e_0,\ e_1\rangle$ に対して $E=\begin{pmatrix}0 & 1\\ -15 & 8\end{pmatrix}$

E の固有多項式

$\Phi_E=\det(xB-E)=\det\begin{pmatrix}x & -1\\ 15 & x-8\end{pmatrix}=0$ より，

$x=5$，$x=3$

よって，E は $P^{-1}EP=\begin{pmatrix}5 & 0\\ 0 & 3\end{pmatrix}$ と変形できる．

E と $\begin{pmatrix}5 & 0\\ 0 & 3\end{pmatrix}$ は相似．$f_0=\{5^n\}$，$f_1=\{3^n\}$ が解空間の基底となり，$c_15^n+c_23^n$が解．イメージ的に①，②の解平面は3次元の中の同じ向きの平面で②は原点を通る．①の平面は①上の1点と②の平面を用いて表される．固有値についてはその平面上の固有ベクトル方向に固有値倍伸ばした平面だと思ってよく，比例定数の発展である．

(6) 和分

(i) 階乗関数 $n=1, 2, 3,$ ……のとき

$x^{(n)}=x(x-1)(x-2)\cdots\cdots(x-n+1)$

$x^{(0)}=1$

例えば，$x^{(3)}=x(x-1)(x-2)$

n が負の整数のときは

$$x^{(n)}=\frac{1}{(x-n)^{(-n)}}=\frac{1}{(x+1)(x+2)\cdots\{x+(-n)\}}$$

と定義すると

$\Delta x^{(n)}=(x+1)^{(n)}-x^{(n)}$

$=(x+1)x^{(n-1)}-(x+1-n)x^{(n-1)}=nx^{(n-1)}$

となる．負でも成り立つ

n が整数でないときはガンマ関数 $\Gamma(x)$ を用いる．

$$\Gamma(x)=\int_0^\infty t^{x-1}e^{-t}dt$$

ガンマ関数の基本的性質は

$\Gamma(x)=(x-1)\Gamma(x-1)$

よって，$\Gamma(x)=(x-1)!$（階乗の拡張である）

n が整数でないとき $x^{(n)}=\dfrac{\Gamma(x+1)}{\Gamma(x-n+1)}$

ただし，$x-n+1\neq 0,\ -1,\ -2,\ \cdots\cdots$

と定義する．

(ii) スターリング数

$x^{(n)}=S_n{}^1x+S_n{}^2x^2+\cdots\cdots+S_n{}^nx^n$ としたときの係数

$S_n{}^1$，$S_n{}^2\cdots\cdots$を第1種のスターリング数といい逆に

$x^n=\mathfrak{S}_n{}^1x^{(1)}+\mathfrak{S}_n{}^2x^{(2)}+\cdots\cdots+\mathfrak{S}_n{}^nx^{(n)}$ としたときの係数 $\mathfrak{S}_n{}^1$，$\mathfrak{S}_n{}^2$，……を第2種のスターリング数という．スターリング数はある一定の要素を分割する際の方法の数を求めるときなどに使われる．

(iii) 和分演算子

差分の逆演算として和分演算子 Δ^{-1} を定義する．

$$\Delta^{-1}x^{(n)}=\frac{x^{(n+1)}}{n+1}+C\ (n\neq -1)$$

$\Delta^{-1}1=x^{(1)}+C$

和分演算子は級数の和としても定義され

$$\Big[\Delta^{-1}u(x)\Big]_m^{n+1}=\sum_{k=m}^{n}u(k)$$

$$=\Delta^{-1}u(n+1)-\Delta^{-1}u(m)$$

ここで教科書に載っている問題を和分で解くと

① $1\cdot2+2\cdot3+\cdots\cdots+n\cdot(n+1)=\displaystyle\sum_{x=1}^{n}x(x+1)$

$$=\sum_{x=1}^{n}(x+1)^{(2)}=\Big[\Delta^{-1}(x+1)^{(2)}\Big]_1^{n+1}$$

$$=\Big[\frac{(x+1)^{(3)}}{3}\Big]_1^{n+1}=\frac{1}{3}\{(n+2)^{(3)}-2^{(3)}\}$$

$$=\frac{1}{3}(n+2)(n+1)n$$

② $\dfrac{1}{1\cdot2}+\dfrac{1}{2\cdot3}+\cdots\cdots+\dfrac{1}{n(n+1)}$

$$=\sum_{x=1}^{n}\frac{1}{x(x+1)}=\sum_{x=1}^{n}\frac{1}{(x-1)^{(2)}}=\Big[\Delta^{-1}(x-1)^{(-2)}\Big]_1^{n+2}$$

$$=\Big[-(x-1)^{(-1)}\Big]_1^{n+2}=-\frac{1}{n+1}+1=\frac{n}{n+1}$$

③ $1^2+2^2+\cdots\cdots+n^2=\displaystyle\sum_{x=1}^{n}x^2=\sum_{x=1}^{n}(x^{(2)}+x^{(1)})$

$$=\Big[\Delta^{-1}(x^{(2)}+x^{(1)})\Big]_1^{n+1}=\Big[\frac{1}{3}x^{(3)}+\frac{1}{2}x^{(2)}\Big]_1^{n+1}$$

$$=\frac{1}{3}(n+1)n(n-1)+\frac{1}{2}(n+1)n$$

$$=\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$$

同様な方法で

$1^4+2^4+3^4+\cdots\cdots+n^4$

$$=\frac{1}{30}(n+1)n(2n+1)(3n^2+3n-1)$$

（一般に $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}k^l$ は必ず $n(n+1)$ を因数にもつ）．

(iv) ベルヌーイ数

$\Delta^{-1}x^n$ を x の多項式で表したときの x の係数をベルヌーイ数といい B_n で表す．

$\Delta^{-1}x^0=x+C_1$，$\Delta^{-1}x^1=\dfrac{1}{2}x^2-\dfrac{1}{2}x+C_2$，

$\Delta^{-1}x^2=\dfrac{1}{3}x^3-\dfrac{1}{2}x^2+\dfrac{1}{6}x+C_3$，（$C_1$，$C_2$，$C_3$ は任意定数）としたとき $B_0=1$，$B_1=-\dfrac{1}{2}$，

$B_2=\dfrac{1}{6}$ である．

(7) 元利均等方式（差分法の実生活への応用）

$U(x+1)-aU(x)=b$（ただし $a\neq 0$，$a\neq 1$，x は負でない整数）

で $U(1)=aU(0)+b$，

$U(2)=aU(1)+b=a^2U(0)+(1+a)b$

$U(x)=a^xU(0)+(1+a+a^2+\cdots\cdots+a^{x-1})b$

$=a^xU(0)+\dfrac{1-a^x}{1-a}b$ …… ① となる．

いま，元金 $S(0)$，利率 i の複利計算として1年ごとにAだけ返済する場合

$\Delta S(t)=S(t+1)-S(t)=iS(t)-A$

$S(t+1)-(1+i)S(t)=-A$

これに①の結果を用いると

$$S(t)=(1+i)^tS(0)-\frac{(1+i)^t-1}{i}A \quad \cdots\cdots \text{②}$$

②で $S(t)=0$ とすれば

$$A=\frac{i(1+i)^t}{(1+i)^t-1}S(0)$$

これは住宅ローンなどで毎月一定の金額を返済する際に応用できる．実際は t は月で i も月利として計算すればよい．表計算ソフトの中にも財務関数として組みこまれている．

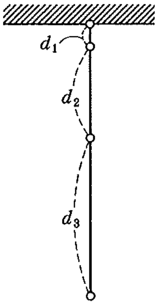
3. 整関数の差分と階差数列

(1) レオナルド=ダ=ヴィンチが見い出した規則性

イタリアが生んだ万能の天才レオナルド=ダ=ビンチは落体の法則を見い出し，それがデカルト，ガリレオに大きな影響を与えたと言われている．

その規則性とは単位時間に落下した球の距離について，

$$d_2-d_1=d_3-d_2$$



これは2次関数の2階差分を求めたとき，その値は定数となることから当然であろう．

歴史的にも差分の考えが微分につながっていったことがわかる．

(2) $f(x)=x^3$ の差分表

x	…−4　−3　−2 −1 0 1 2　3　4…
$f(x)$	−64 −27 −8 −1 0 1 8 27 64
$\Delta f(x)$	37 19 7 1 1 7 19 37
$\Delta^2 f(x)$	−18 −12 −6 0 6 12 18
$\Delta^3 f(x)$	6 6 6 6 6 6

上の表を見てわかる様に n 回差分をとって定数になった場合，その関数は n 次関数である．

この様に原点中心ではなく，隣の項との差をとることによって1次，2次，3次関数は結びつく．また階差数列の公式を用いても元の関数は求められるが，テーラー展開のきっかけとなった次のニュートンの補間公式ですぐに求めることができる．

(3) ニュートンの補間公式

$$f(x)=a_0+a_1x^{(1)}+a_2x^{(2)}+a_3x^{(3)}+\cdots\cdots+a_nx^{(n)}$$

ここで次々に差分すると

$$\Delta f(x)=a_1+2a_2x^{(1)}+3a_3x^{(2)}+\cdots\cdots+na_nx^{(n-1)}$$

$$\Delta^2 f(x)=2\times1\times a_2+3\times2\times a_3x^{(1)}+\cdots\cdots+n(n-1)a_nx^{(n-2)}$$

$$\vdots$$

$$\Delta^n f(x)=n!\,a_nx^{(0)}$$

ここで $x=0$ を代入して a_0，a_1，……a_n を求めると，

$$f(x)=f(0)+\Delta f(0)x^{(1)}+\frac{\Delta^2 f(0)}{2!}x^{(2)}+\cdots\cdots+\frac{\Delta^n f(0)}{n!}x^{(n)} \quad \cdots\cdots \text{①}$$

①をニュートンの補間公式という

①を使うと例えば $(x,\ y)$ 平面上の6点 (0, 1), (1, 3), (2, −1), (3, 13), (4, 45), (5, 71) を通る最小次の多項式 $f(x)$ が求められる．

x	$f(x)$	$\Delta f(x)$	$\Delta^2 f(x)$	$\Delta^3 f(x)$	$\Delta^4 f(x)$	$\Delta^5 f(x)$
0	①					
		②				
1	3		−6			
		−4		24		
2	−1		18		−24	
		14		0		0
3	+13		18		−24	
		32		−24		
4	45		−6			
		26				
5	71					

○の値を①に代入すると

$$f(x)=1+2x-6\times\frac{1}{2!}x(x-1)$$

$$+24\times\frac{1}{3!}x(x-1)(x-2)$$

$$-24\times\frac{1}{4!}\times x(x-1)(x-2)(x-3)$$

$$=1+19x-26x^2+10x^3-x^4$$

整数値だけを見れば整関数と数列は当然のことながら同じで階差数列を用いても解ける．

ここで等比数列（指数関数）の差は，また等比数列になる．差をとることと微分とは大雑把に言えば同じと見れば $(a^x)'=a^x\times\log a$ から差をとっても等比数列になることが理解できる．

以下，次号に続く．

（埼玉県立蓮田高等学校）