複素数平面上の直線と円の方程式について

松井（まつい）　隆一（りゅういち）

(はじめに)

数学Bの複素数平面では，直線や円の方程式は簡単に述べれられているだけで，きちんとまとめられていない．ここでは，それに続く形で，無理なく直線と円の方程式を，xy 平面のそれらと照らしあわせて，高校生に理解できるように導入することを試みる．

ところで，これからよく使う複素数の性質をここにあげておく．

$z\overline{z}=|z|^2$

z が実数 $\Longleftrightarrow$ $z=\overline{z}$

z が純虚数 $\Longleftrightarrow$ $z=-\overline{z}$

3点 α，β，γ が一直線上にある．

$\Longleftrightarrow$ $\dfrac{\gamma-\alpha}{\beta-\alpha}$ が実数

$\alpha\beta /\!/ \gamma\delta \Longleftrightarrow \dfrac{\delta-\gamma}{\beta-\alpha}$ が実数

$\alpha\beta \perp \gamma\delta \Longleftrightarrow \dfrac{\delta-\gamma}{\beta-\alpha}$ が純虚数

(xy 平面と複素数平面)

xy 平面上の点は，2つの実数 x と y を使って表される．直線や円の方程式も x と y で表される．ところが，複素数平面上の点は，1つの複素数 z だけで表される．複素数は，z とその共役な複素数 $\overline{z}$ を使って性質が表されるので，ここでは，z と $\overline{z}$ を使って直線や円の方程式を表すことを考える．

さて，$z=x+yi$　$z\in\mathrm{C}$，x，$y\in\mathrm{R}$ とすると

$\overline{z}=x-yi$

これらより

$x=\dfrac{z+\overline{z}}{2}$，$y=\dfrac{z-\overline{z}}{2i}$ …… (1)　が導き出される．

例1　xy 平面上の直線 $y=2x+1$ は，複素数平面上でどう表されるのだろうか．

先ほど求めた(1)を $y=2x+1$ に代入して

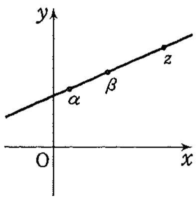
$\dfrac{z-\overline{z}}{2i}=2\times\dfrac{z+\overline{z}}{2}+1$ より

$(1-2i)z-(1+2i)\overline{z}-2i=0$ …… (2)　が求められる．

このように，(1)を用いると xy 平面における直線や円の方程式は，たちどころに複素数平面における直線や円の方程式に直すことができる．でも，これでは，味気無いので複素数の性質を使って，これらを求めることにする．

(直線の方程式)

1°　まず，2点 α，β を通る直線の方程式を求めてみよう．2点 α，β を通る直線上に点 z をとる．3点 α，β，z が一直線上にあるので，



$\dfrac{z-\alpha}{\beta-\alpha}$ が実数となり

$\dfrac{z-\alpha}{\beta-\alpha}=\dfrac{\overline{z}-\overline{\alpha}}{\overline{\beta}-\overline{\alpha}}$ が成り立つ．

分母を払って計算すると，次のようになる．

定理　1　2点 α，β を通る直線の方程式は，

$(\overline{\alpha}-\overline{\beta})z-(\alpha-\beta)\overline{z}+\alpha\overline{\beta}-\overline{\alpha}\beta=0$ …… (3)

である．

例題1　2点 $\alpha=1+3i$，$\beta=-1-i$ を通る直線の方程式を求めよ．

(解)　$\overline{\alpha}=1-3i$，$\overline{\beta}=-1+i$，$\alpha\overline{\beta}=-4-2i$，$\overline{\alpha}\beta=-4+2i$ なので，定理1より

$(1-2i)z-(1+2i)\overline{z}-2i=0$ …… (4)

先ほど求めた例1の(2)とこの(4)は一致する．ちょうど点 α，β が，xy 平面では点 $(1,\ 3)(-1,\ -1)$ を表し，直線 $y=2x+1$ 上にあるからである．

例2　xy 平面で2点 $(x_1,\ y_1)$，$(x_2,\ y_2)$ を通る直線の方程式は　$y-y_1=\dfrac{y_2-y_1}{x_2-x_1}(x-x_1)$ …… (5)である．

$\alpha=x_1+y_1i$，$\beta=x_2+y_2i$，$z=x+yi$ とすると，

(1)より　$x_1=\dfrac{\alpha+\bar{\alpha}}{2}$，$x_2=\dfrac{\beta+\bar{\beta}}{2}$，$x=\dfrac{z+\bar{z}}{2}$，

$y_1=\dfrac{\alpha-\bar{\alpha}}{2i}$，$y_2=\dfrac{\beta-\bar{\beta}}{2i}$，$y=\dfrac{z-\bar{z}}{2i}$ である．

これらを，(5)へ代入して定理1を導いてみよう．

$$\frac{z-\bar{z}}{2i}-\frac{\alpha-\bar{\alpha}}{2i}=\frac{\dfrac{\beta-\bar{\beta}}{2i}-\dfrac{\alpha-\bar{\alpha}}{2i}}{\dfrac{\beta+\bar{\beta}}{2}-\dfrac{\alpha+\bar{\alpha}}{2}}\left(\frac{z+\bar{z}}{2}-\frac{\alpha+\bar{\alpha}}{2}\right)$$

$$z-\bar{z}-\alpha+\bar{\alpha}=\frac{\beta-\bar{\beta}-\alpha+\bar{\alpha}}{\beta+\bar{\beta}-\alpha-\bar{\alpha}}(z+\bar{z}-\alpha-\bar{\alpha})$$

$$(\beta+\bar{\beta}-\alpha-\bar{\alpha})(z-\bar{z}-\alpha+\bar{\alpha})$$
$$=(\beta-\bar{\beta}-\alpha+\bar{\alpha})(z+\bar{z}-\alpha-\bar{\alpha})$$

これを計算して

$(\bar{\alpha}-\bar{\beta})z-(\alpha-\beta)\bar{z}+\alpha\bar{\beta}-\bar{\alpha}\beta=0$ …… (3)

となる．

(3)をよくみてみると，$\alpha-\beta$ と $\bar{\alpha}-\bar{\beta}$ は共役である．また，$\alpha\bar{\beta}$ と $\bar{\alpha}\beta$ も共役なので，$\alpha\bar{\beta}-\bar{\alpha}\beta$ は純虚数である．そこで，(3)は

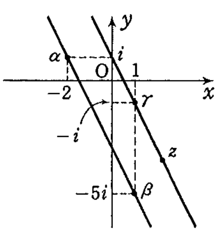
$\bar{\lambda}z-\lambda\bar{z}+\mu=0$　　ただし，μ は純虚数 …… (6)

と表すことができる．これを，複素数平面の直線の方程式の一般形と呼ぶことにする．ちょうど，xy 平面の $ax+by+c=0$ …… (7) にあたる．a，b，c はどんな実数でもよかったが，(6)では，λ と $\bar{\lambda}$ は共役，μ は純虚数という制約がつく．

それでは，直線に関するいろいろな問題を解いてみよう．

例題2　2点 $\alpha=-2+i$，$\beta=1-5i$ を通る直線に平行で点 $\gamma=1-i$ を通る直線の方程式を求めよ．

(解)　求める直線上に点 z をとる．



$\alpha\beta \parallel \gamma z$ より

$\dfrac{z-(1-i)}{(1-5i)-(-2+i)}$ が実数なので

$$\frac{z-(1-i)}{(1-5i)-(-2+i)}=\frac{\bar{z}-(1+i)}{(1+5i)-(-2-i)}$$

が成り立つ．

$$\frac{z-(1-i)}{3-6i}=\frac{\bar{z}-(1+i)}{3+6i}$$

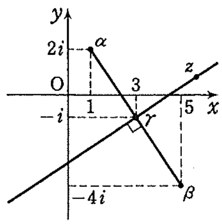
$(3+6i)\{z-(1-i)\}=(3-6i)\{\bar{z}-(1+i)\}$

$(3+6i)z-(3-6i)\bar{z}-6i=0$

$(1+2i)z-(1-2i)\bar{z}-2i=0$

例題3　2点 $\alpha=1+2i$ と $\beta=5-4i$ を結ぶ線分 $\alpha\beta$ の垂直2等分線の方程式を求めよ．

(解)



線分 $\alpha\beta$ の中点を γ とする．

$\gamma=\dfrac{1+2i+5-4i}{2}=3-i$

求める垂直2等分線上に点 z をとる．

$\alpha\beta \perp \gamma z$ より

$\dfrac{z-(3-i)}{(5-4i)-(1+2i)}$ が純虚数なので

$$\frac{z-(3-i)}{(5-4i)-(1+2i)}=-\frac{\bar{z}-(3+i)}{(5+4i)-(1-2i)}$$

が成り立つ．

$$\frac{z-(3-i)}{4-6i}=-\frac{\bar{z}-(3+i)}{4+6i}$$

$(4+6i)\{z-(3-i)\}=-(4-6i)\{\bar{z}-(3+i)\}$

$(4+6i)z+(4-6i)\bar{z}-26=0$

$(2+3i)z+(2-3i)\bar{z}-13=0$

(6)の形にするために両辺に i を掛ける．

$(-3+2i)z+(3+2i)\bar{z}-13i=0$

$(-3+2i)z-(-3-2i)\bar{z}-13i=0$

ここでは，(6)の形にこだわった．これは，あとで出てくる定理2を使うとき，便利なようにである．

例題4　直線 $5z-(3-4i)\bar{z}+5+10i=0$ を一般型 $\bar{\lambda}z-\lambda\bar{z}+\mu=0$，$\mu$ は純虚数　にせよ．

(解)　$5+10i$ に何を掛けると純虚数になるか考える．$5(1+2i)$ として，$1+2i$ と共役な複素数 $1-2i$ を掛けると実数になる．実数に i を掛けたものが純虚数なので，$(1-2i)i$ を掛けると純虚数になる．

$5(1-2i)iz-(3-4i)(1-2i)i\bar{z}$
$\qquad +5(1+2i)(1-2i)i=0$

$(10+5i)z-(10-5i)\bar{z}+25i=0$

$(2+i)z-(2-i)\bar{z}+5i=0$

例題5　2直線 $(-3-i)z-(-3+i)\bar{z}+6i=0$，
$(-1-2i)z-(-1+2i)\bar{z}-8i=0$
の交点を求めよ．

(解)　第1式に $(-1+2i)$ を，第2式に $(-3+i)$ を掛けて，辺々引けば $\bar{z}$ が消去されて，交点 z が求められる．

$(-3-i)(-1+2i)z-(-3+i)(-1+2i)\bar{z}$
$\qquad +6i(-1+2i)=0$

$$(-3-i)(-1-2i)z-(-3+i)(-1+2i)\overline{z}-8i(-3+i)=0$$

$$-10iz-30i-20=0$$

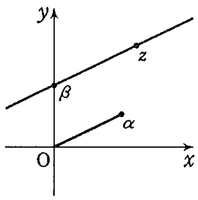
$$z=\frac{3i+2}{-i}=-3+2i$$

ところで，困ったことが1つある．それは，一般型で表された直線の方程式をいくらながめても，どんな直線かわからないことである．例えば，

$(1-2i)z-(1+2i)\overline{z}-2i=0$ が表す直線が，複素数平面でどのような直線なのかみえてこない．これは，xy 平面でも同じことで，一般型 $ax+by+c=0$ で表された直線は，どんな直線かみえてこないが，これを $y=ax+b$ に変形すると，傾きが a，y 切片が b の直線として，ありありとみえてくる．この $y=ax+b$ にあたる式は，複素数平面でどのような形をしているのだろうか．

傾きにあたるものを複素数で表すことは，難しいので，平行を使ってみる．垂直よりも平行の方が傾きに近いような気がする．

2° 点 α と原点を結ぶ直線に平行で，虚軸切片（複素数平面らしく，こう呼ぶことにする）が β である直線の方程式を求めよう．ただし，β は純虚数．



これは，例題2と同じ考え方で求められる．求める直線上に点 z をとる．

$\beta z /\!/ \mathrm{o}\alpha$ より

$\dfrac{z-\beta}{\alpha}$ が実数なので

$\dfrac{z-\beta}{\alpha}=\dfrac{\overline{z}-\overline{\beta}}{\overline{\alpha}}$ が成り立つ．

ただし，β は純虚数なので $\overline{\beta}=-\beta$ を使うと次のようになる．

定理2 点 α と原点を結ぶ直線に平行で，虚軸切片が β である直線の方程式は，

$$\frac{z-\beta}{\alpha}=\frac{\overline{z}+\beta}{\overline{\alpha}},\ \beta \text{ は純虚数} \cdots\cdots (8)$$

(8)の分母を払って整理すると，

$\overline{\alpha}z-\alpha\overline{z}-(\alpha+\overline{\alpha})\beta=0 \cdots\cdots (9)$ になる．

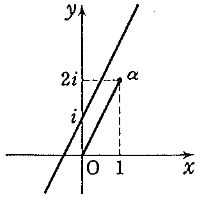
例3 $(1-2i)z-(1+2i)\overline{z}-2i=0 \cdots\cdots (4)$ を定理2の(8)の形にしてみよう．そのために(9)と(4)を比較してみると

$\alpha=1+2i$，$\overline{\alpha}=1-2i$

$-(\alpha+\overline{\alpha})\beta=-2i$ より $-2\beta=-2i$

$\beta=i$ となる．

よって $\dfrac{z-i}{1+2i}=\dfrac{\overline{z}+i}{1-2i}$



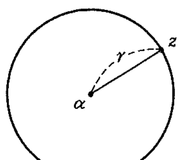
(4)は点 $\alpha=1+2i$ と原点Oを結ぶ線分に平行で，虚軸切片が i の直線であることがわかる．ちょうど点 α とOを結ぶ線分が，xy 平面での傾き2を表している．それにしても，傾きは実に簡単にうまく直線の特徴を表しているものだと感心します．

（円の方程式）

3° 円はある点からの距離が一定である点の集合である．複素数平面では，2点 α，β 間の距離は絶対値を使って，$|\beta-\alpha|$ と表される．よって次の定理が導かれる．

定理3 中心が α，半径が r（r は正の実数）の円の方程式は，円周上の点を z とすると，

$|z-\alpha|=r \cdots\cdots (10)$ となる．



4° 次に直線の方程式を，z と $\overline{z}$ で表したのにあわせて，円の方程式も z と $\overline{z}$ で表す．(10)の両辺を2乗する．

$$|z-\alpha|^2=r^2$$

$$(z-\alpha)(\overline{z}-\overline{\alpha})=r^2$$

$$z\overline{z}-\overline{\alpha}z-\alpha\overline{z}+\alpha\overline{\alpha}-r^2=0$$

ここで，$c=\alpha\overline{\alpha}-r^2$ とおく．c は実数

$$z\overline{z}-\overline{\alpha}z-\alpha\overline{z}+c=0$$

逆に $(z-\alpha)(\overline{z}-\overline{\alpha})-\alpha\overline{\alpha}+c=0$

$$|z-\alpha|^2=\alpha\overline{\alpha}-c$$

$\alpha\overline{\alpha}-c>0$ であれば

$|z-\alpha|=\sqrt{\alpha\overline{\alpha}-c}$ となり

中心 α，半径 $\sqrt{\alpha\overline{\alpha}-c}$ の円を表す．

まとめると次の定理になる．

定理4 $z\overline{z}-\overline{\alpha}z-\alpha\overline{z}+c=0$，$c$ は実数で $\alpha\overline{\alpha}-c>0 \cdots\cdots (11)$ は円を表し，中心は α で，半径は $\sqrt{\alpha\overline{\alpha}-c}$ である．

※ 特に $c<0$ ならば，$\alpha\overline{\alpha}-c>0$ が成り立ち，円を表す．これを円の一般形と呼ぼう．

例題6 $2z\overline{z}+(3-i)z+(3+i)\overline{z}-8=0$ はどのような図形を表すか．

$$z\bar{z}+\frac{3-i}{2}z+\frac{3+i}{2}\bar{z}-4=0$$

定理４より　$\alpha=-\frac{3+i}{2}$　$\sqrt{\alpha\bar{\alpha}-c}=\sqrt{\frac{13}{2}}$

よって，中心 $-\frac{3+i}{2}$　半径 $\sqrt{\frac{13}{2}}$ の円を表す．

例題７　３点 $7+i$，$-1+5i$，$-2-2i$ を通る円の方程式を求めよ．

(解)　求める円の方程式を

$z\bar{z}-\bar{\alpha}z-\alpha\bar{z}+c=0$，$c$ は実数とする．

(i)　$z=7+i$ を代入

$$(7+i)(7-i)-(7+i)\bar{\alpha}-(7-i)\alpha+c=0$$

$$(7+i)\bar{\alpha}+(7-i)\alpha-c-50=0 \quad \cdots\cdots \text{①}$$

(ii)　$z=-1+5i$ を代入

$$(-1+5i)(-1-5i)-(-1+5i)\bar{\alpha}-(-1-5i)\alpha+c=0$$

$$(1-5i)\bar{\alpha}+(1+5i)\alpha+c+26=0 \quad \cdots\cdots \text{②}$$

(iii)　$z=-2-2i$ を代入

$$(-2-2i)(-2+2i)-(-2-2i)\bar{\alpha}-(-2+2i)\alpha+c=0$$

$$(2+2i)\bar{\alpha}+(2-2i)\alpha+c+8=0 \quad \cdots\cdots \text{③}$$

①＋②

$$(8-4i)\bar{\alpha}+(8+4i)\alpha-24=0$$

$$(2-i)\bar{\alpha}+(2+i)\alpha-6=0 \quad \cdots\cdots \text{④}$$

①＋③

$$(9+3i)\bar{\alpha}+(9-3i)\alpha-42=0$$

$$(3+i)\bar{\alpha}+(3-i)\alpha-14=0 \quad \cdots\cdots \text{⑤}$$

$(3+i)\times$④

$$(3+i)(2-i)\bar{\alpha}+(3+i)(2+i)\alpha-6(3+i)=0$$

$(2-i)\times$⑤

$$(3+i)(2-i)\bar{\alpha}+(3-i)(2-i)\alpha-14(2-i)=0$$

$\bar{\alpha}$ を消去　$10i\alpha=-10+20i$

$$\alpha=\frac{-1+2i}{i}=2+i$$

③へ代入

$$(2+2i)(2-i)+(2-2i)(2+i)+c+8=0$$

$$c=-20$$

よって，求める円の方程式は

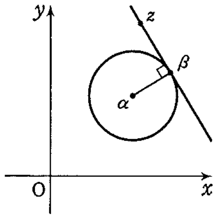
$$z\bar{z}-(2-i)z-(2+i)\bar{z}-20=0$$

$$\alpha=2+i,\ \sqrt{\alpha\bar{\alpha}-c}=\sqrt{5+20}=5$$

中心 $2+i$，半径５の円

5°　円といえば接線である．ここでは，円の接線の方程式を求めよう．

中心が α，半径 r (r は正の実数) の円周上の点 β での接線の方程式を求めてみよう．



点 β は円周上の点なので，

$|\beta-\alpha|=r$

$$(\beta-\alpha)(\bar{\beta}-\bar{\alpha})=r^2$$

$\beta\bar{\beta}-\bar{\alpha}\beta-\alpha\bar{\beta}+\alpha\bar{\alpha}-r^2=0 \quad \cdots\cdots$ ①

を満たす．

求める接線上に点 z をとる．

$z\beta\perp\alpha\beta$ より $\frac{z-\beta}{\alpha-\beta}$ が純虚数なので

$$\frac{z-\beta}{\alpha-\beta}=-\frac{\bar{z}-\bar{\beta}}{\bar{\alpha}-\bar{\beta}}$$

分母を払って整理すると

$$(\bar{\alpha}-\bar{\beta})z+(\alpha-\beta)\bar{z}-\bar{\alpha}\beta-\alpha\bar{\beta}+2\beta\bar{\beta}=0$$

①より

$-\bar{\alpha}\beta-\alpha\bar{\beta}=r^2-\alpha\bar{\alpha}-\beta\bar{\beta}$ なので，次の定理を得る．

定理５　中心 α，半径 r (r は正の実数) の円周上の点 β における接線の方程式は，

$$(\bar{\alpha}-\bar{\beta})z+(\alpha-\beta)\bar{z}-\alpha\bar{\alpha}+\beta\bar{\beta}+r^2=0 \quad \cdots\cdots (12)$$

例題８　単位円周上の点 $\beta=\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{2}}i$ における接線の方程式を求めよ．

(解)　$\alpha=0$，$\beta=\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{2}}i$　$r=1$　なので，

定理５より

$$\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{2}}i\right)z+\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}-\frac{1}{\sqrt{2}}i\right)\bar{z}+2=0$$

$$\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}-\frac{1}{\sqrt{2}}i\right)z+\left(\frac{1}{\sqrt{2}}-\frac{1}{\sqrt{2}}i\right)\bar{z}+2i=0$$

$$\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}-\frac{1}{\sqrt{2}}i\right)z-\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{2}}i\right)\bar{z}+2i=0$$

直線の方程式はあくまで(6)の形にこだわる．

(直線と円の交点)

xy 平面上の直線と円の交点の座標は，直線を表す方程式と円を表す方程式から作られる２次方程式を解くことによって求められる．異なる２つの実数解になると２点で交わり，重解になると１点で接し，異なる２つの虚数解になると交わらない．

では，複素数平面上の直線と円では，どうなるのだろうか．特に直線と円が交わらないときは，どの

ような解が出てくるか楽しみである．

例 4　2 点で交わる場合

中心が原点，半径 5 の円は，$z\bar{z}=25$ …… ①　で
2 点 $3+i$，$3-i$ を通る直線は，$z+\bar{z}=6$ …… ②
である．

①と②の交点は，

$\bar{z}=6-z$ を，②へ代入して　$z(6-z)=25$

$z^2-6z+25=0$ を解くと　$z=3\pm4i$ が出てくる．

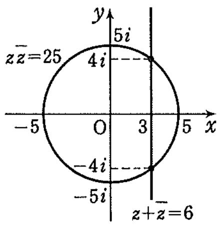
吟味する．

(i)　$z=3+4i$ のとき $\bar{z}=3-4i$ となり①②を満たす．

(ii)　$z=3-4i$ のとき $\bar{z}=3+4i$ となり①②を満たす．

よって，2 点 $3\pm4i$ で交わる．

右図のようになっている．



例 5　1 点で接する場合

中心が原点，半径 5 の円は，$z\bar{z}=25$ …… ①　で
2 点 $5+i$，$5-i$ を通る直線は，$z+\bar{z}=10$ …… ②
である．

①と②の交点は，

$\bar{z}=10-z$ を②へ代入して $z(10-z)=25$

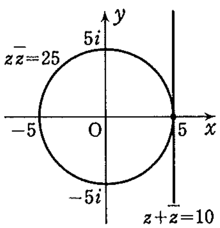
$z^2-10z+25=0$ を解くと $z=5$ が出てくる．

吟味する．

$z=5$ のとき $\bar{z}=5$ となり①②を満たす．

よって 1 点 5 で接している．

右図のようになっている．



例 6　交わらない場合

中心が原点，半径 5 の円は，$z\bar{z}=25$ …… ①　で
2 点 $6+i$，$6-i$ を通る直線は，$z+\bar{z}=12$ …… ②
である．

①と②の交点は，

$\bar{z}=12-z$ を①へ代入して $z(12-z)=25$

$z^2-12z+25=0$ を解くと $z=6\pm\sqrt{11}$ が出てくる．

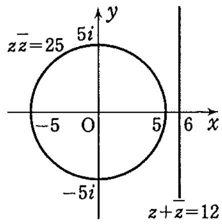
吟味する．

(i)　$z=6+\sqrt{11}$ のとき $\bar{z}=6+\sqrt{11}$ となり①②とも満たさない．

(ii)　$z=6-\sqrt{11}$ のとき $\bar{z}=6-\sqrt{11}$ となり①②とも満たさない．

よって，交点はない．

右図のようになっている．



xy 平面では，直線と円が交わらない場合に計算で交点を求めようとすると，虚数になる．複素数平面では，どうなるのだろうとわくわくしながら，計算してみるときれいに答が出てきた．はじめは，計算まちがいをしたのだろうと思っていたが，そうでないことがわかると，それはもう，どうなっているのか全くわからなくなってしまった．でも，落ち着いて考えてみると，2 次方程式は複素数の範囲で解をもち，それらは複素数平面にすべて図示できる．例 6 で求められた $6\pm\sqrt{11}$ も複素数平面に図示できるが，直線上にも円周上にもない点になっている．これは，z と $\bar{z}$ が共役ということを使わずに解いたためで，最後に必ず解を吟味して，もとの方程式の解になっているか，確かめる必要がある．

(おわりに)

これを書くにあたって，「複素数の幾何学」片山孝次著，岩波書店を参考にしました．高校生に授業するつもりになって，自分なりにアレンジしなおし，特に，定理 2 や直線と円の交点は，新しくつけ加えました．

これぐらいなら，数学Bの複素数平面に新しく追加できるのではないでしょうか．

(大阪府立花園高等学校)