三角関数についての役に立たない公式（その1）

冨田(とみた) 一志(かずし)

1. Introduction

いきなりであるが，次のような問題をご覧になったことがあると思う．詳しくは，参考文献［3］をご覧下さい．

問題1　次の式の値を求めよ．

1．$\cos 20°\cos 40°\cos 80°$

2．$\sin 20°+\sin 140°+\sin 260°$

これを解くこと自体は難しくなかろう．いわゆる和→積の公式，積→和の公式を使うだけだから．ただ計算は面倒くさい．できることならやりたくない．もう少し本質的なことを言えば，何故こんな問題を思い付くのか．これらの問題はきちんと答が出るのだけれど，きちんと答が出るように，問題を作成するにはどうしたらよいのか．

と思われないか．私はかなり以前から，この問題について考えてきた．ちなみにメモに残っている日付によると，1994年5月17日に最初の結果を得ているのでかれこれ5年も前のことになる．

さて上のような問題を挙げたのだが，皆さんは三角関数で最も大切なもの（公式等）といったら何を挙げるだろうか．加法定理，正弦定理，余弦定理，面積の公式，あるいはグラフ．いろいろ考えることはできるであろう．そこで私としては敢えて，図1を挙げたい．

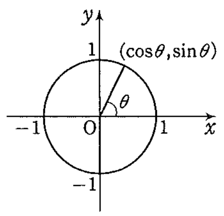

図1：$(\cos\theta, \sin\theta)$

というか授業の際に「これしかない」と言っていることなのだけれど．この図1がきちんと理解できてさえいれば，後は何でもこれから導くことができる．加法定理，三角関数の合成の合成，あるいは複素数平面の極形式．すべてこの図が理解できてさえいれば，簡単なことなのである．

さて，くだらないことを述べてきたがそろそろ本題に入ろう．三角関数と言えば，和→積の公式，積→和の公式をはじめ，色々な公式が顔を出す分野である．そこで，公式と言ったときに，どれくらいのものが実用になるのか．どれくらい作ることができるのか．挑戦してみた結果がこの文書である．作成した公式については参考文献からヒントを得たものも多い．しかし，本当に実用になるのかと疑問をもつものも少なくない．実用云々については読んでおいでの皆様方の判断にお任せするとして，自分で勝手におもしろいと思って作ったものを挙げてみた．これらをご覧になって三角関数において真に必要なこととは何であるのか．三角関数の本質とは何であるのか．このことを考えて頂くひとつの材料にして頂ければ，幸いである．

2. 役に立たない公式 その1

問題1に関連して次の命題が成り立つ．この結果は参考文献［5］に似たような式が載っている．ちなみにこの本は数のことを書き記したものであるが，π を，写像 exp：C→C（Cは複素数体のこと）の核 $Ker(exp)$ が Z（有理整数環）と同型であることを示し，$Ker(exp)=2\pi iZ$ を満たす正の数として定義するという strong なものである．

趣味と言ってしまえばおしまいであるが，なかなかおもしろい本である．なお，この本の下巻も出版されているがこちらについては完全に趣味の世界にはいるので普通の方には面白くないかも知れない．

命題1

$$\cos\alpha\cos 2\alpha\cos 2^2\alpha \cdots\cdots \cos 2^{n-1}\alpha = \frac{\sin 2^n\alpha}{2^n\sin\alpha} \tag{1}$$

さて，この命題であるが，証明自体は帰納法を用いれば簡単にできる．問題は何故こんな等式を思い付くかということである．私がこの命題を思い付くに至った過程を少し述べてみよう．

問題1のような問題を見ると sin と cos の違いはあるが，次のような式の値を求めたくならないだろうか(私は求めたくなる．あなたもきっと求めたくなる)．

$$\sin\alpha\sin 2\alpha\sin 2^2\alpha \tag{2}$$

を考えると2倍角の公式があるから次のように変形することに思い至る．

$$\sin\alpha\sin 2\alpha\sin 2^2\alpha$$
$$=\sin\alpha(2\sin\alpha\cos\alpha)(2\sin 2\alpha\cos 2\alpha)$$

この両辺を $2^2\sin^2\alpha\sin 2\alpha$ で割れば，先の命題の $n=2$ のケースとなる．一般の場合も同様である．

さてこの公式(といってもいいかな)は役に立ちそうにないのだが，少しは役に立つのだ．というのも試験の問題作製に重宝するのだ．例を示しておこう．

例1　等式1で $\sin n\alpha=\sin\alpha$，あるいは，$\sin n\alpha=-\sin\alpha$ となる n と α を見つけておけば，積→和の公式の練習問題ができそうである．

$n=3$ のとき，$\sin 8\alpha=\sin\alpha$ とすれば，

$8\alpha-\alpha=2\pi$ として，$\alpha=\dfrac{2}{7}\pi$

特に，$\cos\dfrac{2}{7}\pi\cos\dfrac{4}{7}\pi\cos\dfrac{8}{7}\pi=\dfrac{1}{8}$ がわかる．

また，$8\alpha=\pi-\alpha$ として，$\alpha=\dfrac{\pi}{9}=20^\circ$

これが，問題1のケースにあたる．

$n=4$ のとき，(度数法できれいになるのはこれ位までで，それも次の例くらいしかないかも知れない．きちんと調べていないので御免なさい．)

$\sin 16\alpha=\sin\alpha$ とすれば，$16\alpha=\alpha+360^\circ$ として，$\alpha=24^\circ$

特に，$\cos 24^\circ\cos 48^\circ\cos 96^\circ\cos 192^\circ=\dfrac{1}{16}$ がわかる．

また，$16\alpha=\alpha+3\pi$ として，$\alpha=\dfrac{\pi}{5}=36^\circ$

特に，$\cos 36^\circ\cos 72^\circ\cos 144^\circ\cos 288^\circ=-\dfrac{1}{16}$ がわかる．

$\cos 36^\circ$ とか，$\cos 72^\circ$ の値は無理をすると求まるので，この例は何かに使えるかも知れない．

更に全然つまらない例ではあるが，次のようなものも考えられる．

$n=3$ のとき，$\sin 8\alpha=\sin\alpha$ とすれば，

$8\alpha=3\pi-\alpha$ として，$\alpha=\dfrac{\pi}{3}$．

特に，$\cos 60^\circ\cos 120^\circ\cos 240^\circ=-\dfrac{1}{8}$ という至極当たり前の等式がわかる．

3. 役に立たない公式 その2

第2章では積をある値に直す公式を与えたのだが，問題1の2のケースに当たる(実はそうでない)公式を与えてみたい．ただし，その問題の式自体が，ここで与える式から導けるかどうかは保証の限りではない．

命題2　$\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma$

$$=\frac{1}{4}\{\cos(\alpha+\beta+\gamma)+\cos(\alpha-\beta+\gamma)+\cos(-\alpha+\beta+\gamma)+\cos(\alpha+\beta-\gamma)\} \tag{3}$$

証明は，和→積の公式を2回用いればよい．練習問題としたい．

同様な式が sin に対しても成り立つ．これについて(この後の結果についても)読者各人に証明などをお任せしたい．

証明は，いま述べたように力づくで可能であるが，美しくない．また，結果自体ある意味美しいが，それでも許せるものではない．そこで次のように変形してみよう．

$\alpha-\beta+\gamma=B$，$-\alpha+\beta+\gamma=A$，$\alpha+\beta-\gamma=C$ とおくと，次のように命題を変形することができる．

命題3　$\cos\dfrac{B+C}{2}\cos\dfrac{C+A}{2}\cos\dfrac{A+B}{2}$

$$=\frac{1}{4}\{\cos(A+B+C)+\cos A+\cos B+\cos C\} \tag{4}$$

ここで，$B=A+120^\circ$，$C=B+120^\circ$ としておけば，$\cos A+\cos B+\cos C=0$

この結果は，図を描けば明らかなことで，正三角形の重心と外心が一致している，という初等幾何学の基本的事実による．

そこで，例えば，$A=10^\circ$，$B=130^\circ$，$C=250^\circ$ とすれば，先の等式(4)は次のようになる．

$$\cos\frac{130^\circ+250^\circ}{2}\cos\frac{250^\circ+10^\circ}{2}\cos\frac{10^\circ+130^\circ}{2}$$
$$=\frac{1}{4}\{\cos(10^\circ+130^\circ+250^\circ)\}$$

つまり，cos の性質を利用して，次のような結果が得られよう．

$$\cos 10^\circ \cos 50^\circ \cos 70^\circ = \frac{\sqrt{3}}{8}$$

等式(4)で，$B=A+120^\circ$，$C=A+240^\circ$ としておけば，様々な問題を作成できるはずである．A の値としては度数法で表示したときに，10° の倍数か，15° の倍数になるものを選んでおけばよいと思われる．ただし，この方法で作られる問題で，問題集などに出てくる問題すべてを尽くせるとは限らないことを，確認しておきたい．

さて，つまらぬことを述べたので open problem として次の問題を挙げておいて，この章を終えることとしよう．この問題を思い付いたのは私自身であり，私自身かなり永く（ウソ）考えたのだが，作れそうになく，その理由もはっきりしないままなのである．もしも解けた方は至急連絡を下さい．

問題 2　第 2 章の等式(1)の sine version はできないか．できないのならその理由を述べよ．

4. 役に立たない公式 その 3

先も述べたことであるが，第 2 章，第 3 章の結果については 1994 年 5 月頃に得られたものである．

ところで何故こんなことを考え出したのか．教科書に現れる和→積の公式，積→和の公式を用いる練習問題を自力で作りたい．試験問題にできそうな問題を作りたい．和→積の公式，積→和の公式の意味を知りたい．いろいろ考えはあったのだが，実は次のような問題が参考文献 [6] に載っていたからである．この問題が解けないかとずっと考えていた副産物なのである．

なお，この本 [6] は私が大学のときの関数論の講義で使われた本で，その頃は，出版社が違っていたように思う．

問題 3　ルジャンドルの公式の証明を一般化して次の公式を示せ．

$$\Gamma(nz)=(2\pi)^{-\frac{n-1}{2}} n^{nz-\frac{1}{2}} \Gamma(z)\Gamma\left(z+\frac{1}{n}\right) \cdots\cdots \Gamma\left(z+\frac{n-1}{n}\right)$$

積分定数の決定には，

$$\sin\frac{\pi}{n}\sin\frac{2\pi}{n}\cdots\cdots\sin\frac{(n-1)\pi}{n}=\frac{n}{2^{n-1}} \quad (n \geqq 2) \qquad (5)$$

を用いる（式番号は勝手につけたものであり，式の表現が参考文献と少し違うかも知れませんがお許し下さい）．

この中の何が大事かといえばもちろん等式(5)である．こんな等式を，その頃（1990 年頃だと思う）見たことがなかったし，何かきれいな格好をしているではないか．あるいは，次に説明したいのだが，これを知っていれば大学の解析でやった定積分の計算が簡単になるじゃないか．

様々な理由があったのだがこの等式を見たとき，感動のあまり震えがきたものである（ウソです）．

とにかく，この公式を使うと楽ができる問題を挙げ，解答例を示してみよう．

例 2　次の式の値を計算せよ．

$$\sin 20^\circ \sin 40^\circ \sin 80^\circ$$

この問題については，通常，和→積の公式を用いて示すのであるが，等式(5)を知っていれば次のようにする事もできる．

解答　（等式(5)を利用した解答）

等式(5)によれば

$$\sin 20^\circ \sin 40^\circ \sin 60^\circ \cdots\cdots \sin 160^\circ = \frac{9}{2^8}$$

$$(\sin 20^\circ \sin 40^\circ \sin 80^\circ)^2 = \frac{3}{2^6}$$

よって $\sin 20^\circ \sin 40^\circ \sin 80^\circ = \dfrac{\sqrt{3}}{8}$

また，次は大学の解析学の演習によく出てくる積分である．

例 3　定積分 $\int_0^{\pi} \log(\sin x)dx$ の値を計算せよ．

解答　（普通の解答）

$I=\int_0^{\frac{\pi}{2}} \log(\sin x)dx$ とおくと，対称性から，

$I=\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \log(\sin x)dx$ で，

$$(\text{与式})=2I=2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \log(\sin x)dx$$

ここで，$x=\dfrac{\pi}{2}-t$ とおくと，$dt=-dx$ で，

$x : 0 \to \dfrac{\pi}{2}$ のとき，$t : \dfrac{\pi}{2} \to 0$ なので

$$(\text{与式})=2I=\int_0^{\frac{\pi}{2}} \log(\sin x)dx+\int_0^{\frac{\pi}{2}} \log(\cos x)dx$$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{2}} \log(\sin 2x)dx-\frac{\pi}{2}\log 2$$

ここで，$2x=t$ とおけば，$dt=2dx$ で，

$x:0\to\frac{\pi}{2}$ のとき，$t:0\to\pi$ なので

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\log(\sin 2x)dx=\frac{1}{2}\int_0^{\pi}\log(\sin t)dt=I$$

ゆえに　$I=-\frac{\pi}{2}\log 2$

特に　$\int_0^{\pi}\log(\sin x)dx=-\pi\log 2$

解答　(等式(5)を利用した解答)

等式(5)によれば　$\prod_{k=1}^{N-1}\sin\frac{k}{N}\pi=\frac{N}{2^{N-1}}$

であるから両辺の対数をとり

$$\sum_{k=1}^{N-1}\log\left(\sin\frac{k}{N}\pi\right)=\log N-(N-1)\log 2$$

$$\frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N-1}\log\left(\sin\frac{k}{N}\pi\right)=\frac{1}{N}\log N-\left(1-\frac{1}{N}\right)\log 2$$

ゆえに，この式で $N\to\infty$ として，(これは高校の数IIIの微分積分で出て来る簡単な事実)

$$\int_0^1\log(\sin\pi x)dx=\lim_{N\to\infty}\left\{\frac{1}{N}\log N-\left(1-\frac{1}{N}\right)\log 2\right\}$$
$$=-\log 2$$

ここで，$\pi x=t$ とおけば，$dt=\pi dx$ で，$x:0\to 1$ のとき，$t:0\to\pi$ なので，

$$\int_0^{\pi}\log(\sin t)dt=-\pi\log 2$$

さて，2つの例を挙げてみたのだが，等式(5)の有効性を実感して頂けただろうか．この結果自体かなり美しいものであるし，何よりすぐに答が出そうにないのがよい．

三角関数の和をまとめる形の公式は，複素数を使って導けるのだが，関数解析(Fourier 変換)で Fejer 核のように見たことがある(あった)．ところが，積をまとめる公式である．最初にみたときは感激したものである．きちんとまとめておくことにする．

定理4　$\prod_{k=1}^{N-1}\sin\frac{k}{N}\pi=\frac{N}{2^{N-1}}$

この定理4の証明を後の部分(次号)でやって行くことにする．

〈参　考　文　献〉

［1］　高等学校　数学II：啓林館

［2］　チャート　解法と演習　数作II：数研判版

［3］　スタンダード　数学II：数研出版

［4］　Liang-shin Hahn: *Complex Nunbers and Geometry*: The Mathematical Association of America

［5］　成木 勇夫：数(上)：シュプリンガー・フェアラーク東京

［6］　高橋 礼司：複素解析：東京大学出版会

(島根県立 松江北高等学校)