$\int_a^b f(x)dx=\int_{a-p}^{b-p} f(x+p)dx$ について

藤本　隆（ふじもと　たかし）

(1)　この等式は定積分の計算を簡略にするのに結構役立つのだが，その例は後に記すことにして，最初に証明を示す．

《証明(i)》（数Ⅲ）

$x=t+p$ とおくと，$dx=dt$ で，

$x:a\longrightarrow b$ のとき，

$t:a-p\longrightarrow b-p$ であるから

$$\int_a^b f(x)dx=\int_{a-p}^{b-p} f(t+p)dt=\int_{a-p}^{b-p} f(x+p)dx$$

《証明(ii)》（数Ⅱ）

$\int f(x)dx=F(x)+C$（Cは定数）とおくと，

$F'(x)=f(x)$ であるから $F'(a)=f(a)$

これより，$F'(a-p+p)=f(a-p+p)$

$a-p=t$ とおくと

$F'(t+p)=f(t+p)$

これは関数が定義される任意の実数 t について成り立つから

$F'(x+p)=f(x+p)$

よって

$\int f(x+p)dx=F(x+p)+C$（Cは定数）

これより

$$\int_{a-p}^{b-p} f(x+p)dx=\Big[F(x+p)\Big]_{a-p}^{b-p}$$

$$=F(b)-F(a)=\Big[F(x)\Big]_a^b=\int_a^b f(x)dx$$

すなわち

$$\int_a^b f(x)dx=\int_{a-p}^{b-p} f(x+p)dx$$

(2)　《証明(ii)》は，2つの曲線

$y=F(x)$　…… ①，$y=F(x+p)$　…… ②

において，平行移動から，

曲線②上の $x=a-p$ における接線と，

曲線①上の $x=a$ における接線が平行であることから，直観的に

$F'(a)=f(a)$ ならば

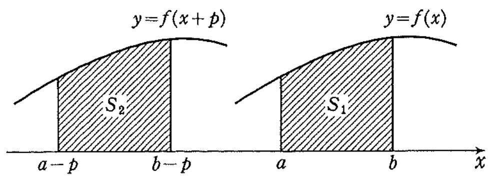
$F'(a-p+p)=f(a)=f(a-p+p)$

を説明してもよかろう．（図は略）

(3)　より直観的には，次の図の2つの面積 S_1，S_2 が等しいことから，

$$\int_a^b f(x)dx=\int_{a-p}^{b-p} f(x+p)dx$$

を説明してもよいだろう．



実は，授業(昨年，2年数Ⅱ)ではこの説明だけにして，

「納得できない人は，個人的に………」

と言っておいた．しかし，これで納得してしまったらしく，説明を求めにきた生徒はいなかった．

(4)　**応用例**

1．放物線 $y=x^2$ と，この曲線に点$(a,\ a^2-1)$から引いた2本の接線とで囲まれる図形の面積を求めよ．(91．青学大．メジアン数Ⅰ・Ⅱ・A・B．310)

《解》（前略）

求める面積は

$$\int_{a-1}^{a}\{x-(a-1)\}^2dx$$

$$+\int_a^{a+1}\{x-(a+1)\}^2dx\quad\cdots\cdots\ ア$$

$$=\int_0^1 x^2dx+\int_{-1}^0 x^2dx\quad\cdots\cdots\ イ$$

$$=\frac{1}{3}+\frac{1}{3}=\frac{2}{3}$$

2．2つの曲線 $y=x^3-x$ と $y=x^2-a$ が1点Pを通り，Pにおいて共通の接線をもっている．この2つの曲線で囲まれた部分の面積を求めよ．

（91．京都大．メジアン数Ⅰ・Ⅱ・A・B．315）

《解》

2つの曲線の接点の x 座標を p，もう1つの交点の x 座標を q とすると，（中略）

$p=1,\ q=-1$ または $p=-\dfrac{1}{3},\ q=\dfrac{5}{3}$ …… ①

求める面積は

$$\left|\int_p^q (x-p)^2(x-q)dx\right|$$
$$=\left|\int_0^{q-p} x^2(x+p-q)dx\right|$$
$$=\left|\int_0^{q-p}\{x^3-(q-p)x^2\}dx\right|$$
$$=\left|\left[\frac{x^4}{4}-\frac{(q-p)x^3}{3}\right]_0^{q-p}\right|$$
$$=\left|\frac{(q-p)^4}{4}-\frac{(q-p)^4}{3}\right|$$
$$=\frac{|(q-p)^4|}{12}=\frac{2^4}{12}=\frac{4}{3}$$

（①より）

3．$\displaystyle\int_1^3(x-1)(x-2)dx=\int_{-1}^1(x+1)xdx$

$$=\int_{-1}^1(x^2+x)dx$$
$$=2\int_0^1 x^2dx=\frac{2}{3}$$

4．$\displaystyle\int_1^3|(x-1)(x-2)|dx=\int_0^2|x(x-1)|dx$

$$=-\int_0^1 x(x-1)dx+\int_1^2 x(x-1)dx$$
$$=-\int_0^1 x(x-1)dx+\int_0^1(x+1)x\,dx$$
$$=\int_0^1 2x\,dx=\Big[x^2\Big]_0^1=1$$

(5) 以上の例のように，初掲の等式を用いると，定積分の計算がかなり簡略化できる．

① $\displaystyle\int_a^b f(x)dx=\int_a^c f(x)dx+\int_c^b f(x)dx$

② $f(x)$ が偶関数のとき，

$$\int_{-a}^a f(x)dx=2\int_0^a f(x)dx$$

$f(x)$ が奇関数のとき，$\displaystyle\int_{-a}^a f(x)dx=0$

の公式に加えて，

$$\int_a^b f(x)dx=\int_{a-p}^{b-p} f(x+p)dx$$
$$=\int_0^{b-a} f(x+a)dx$$

に，公式としての市民権が与えられればありがたいと思っている．

(6) 定積分では計算が煩雑になることが多く，その簡略化は重要だと思う．

昨年，2年生の授業で「応用例1．」の問題を生徒が板書解答したとき，前記の解答を示して，本稿(3)の説明をしたところ，生徒はかなり感動してくれた．

また，本年，代理で3年生の授業をしたとき，「応用例2．」の生徒解答は，煩雑で健気でさえあった．その努力を讃えた後で前記の解答を紹介し，理系のクラスだったので本稿(3)とともに《証明(i)》を示した．この場合も生徒たちは喜んでくれた．

煩雑さを体験したその時に，簡略な方法を提示すると，生徒は印象深く受けとめてくれるものである．

(7) ところで，「公式」としての認知の問題だが，まさか「藤本の公式」として数学史に名が残るほどのものではない．しかし，この「公式」はそれなりに有効なので利用が認められないものかと思っている．念のため手近な参考書や公式集を眺めてみたがそこには取り上げられていない．

そこで，大学入試（あるいは業者模試）との関係が気になる．センターテストならば，計算過程は問われないので問題ないのだが，記述解答が求められている場合に，例えば「応用例1．」で，

「ア」から，ことわりもなく「イ」としたとき，採点者に認めていただけるものかどうか不安である．

生徒には，「イ」とした時点で，

数Ⅱならば（平行移動による）と付記する．

数Ⅲならば（置換積分による）と付記する．

ようにアドバイスをしている．私はこの程度でよかろうと思っているが，どうだろうか．

できれば，「第2水準」の公式として

$$\int_\alpha^\beta(x-\alpha)(x-\beta)dx=-\frac{1}{6}(\beta-\alpha)^3$$

のように自由使用が認められればいいなと思っている．

(8) まったく別件だが，最近の授業で取り上げたばかりなのでついでに記しておきたい．

等式 $\log_a b=\log_{a^t} b^t$

も結構使えるので，私はこれを生徒に与えている．これは，対数の定義から，

$$a^n=b \Longleftrightarrow (a^t)^n=b^t$$

と同値なので，問題なかろう．

したがって，

$$\log_2 3=\log_4 9=\log_8 27=\log_{\sqrt{2}}\sqrt{3}=\cdots\cdots\cdots$$

$$\log_2\sqrt{x-1}=\log_4(x-1)=\log_{\frac{1}{4}}\frac{1}{x-1}=\cdots\cdots$$

等の変形は，「底の変換公式」を経ることなく，ことわりなしで用いてもよかろうと思っている．

以上，どこかで話題にしていただければ幸いである．

(福岡県立 久留米高等学校)