# Newtonの定理の拡張について

## ― Irisunaの定理 ―

入砂 七五三一

## 1. はじめに

数研通信19号でIrisunaの定理（メネラウスの定理・チェバの定理を含む定理）がどんな定理かを発表して以来，数研通信22号では第2定理からの発展として，線束の定理を，また数研通信27号では第3定理，共線定理，共点定理を，さらに数研通信32号では連鎖定理と応用定理を発表した．今回はNewtonの定理にIrisunaの定理を応用して，いくつかの拡張を発表してみます．

まずは，定義とすでに発表したIrisunaの定理，第2定理，第3定理を列挙して準備とします．

## 2. 定義

点Pは図の三角形ABCの周および内部の線分上を動くものとする．

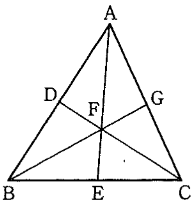
1）動点Pに対応する線分の比とは（平面）

$\sigma(\mathrm{AB})=\dfrac{\mathrm{AD}}{\mathrm{DB}}$ …… ①

$\sigma(\mathrm{BA})=\dfrac{\mathrm{BD}}{\mathrm{DA}}$ …… ②

$\sigma(\mathrm{AD})=\dfrac{\mathrm{AB}}{\mathrm{BD}}$ …… ③

$\sigma(\mathrm{DA})=\dfrac{\mathrm{DB}}{\mathrm{BA}}$ …… ④




のこととする．

他も同様に表すこととする．

2）返り点について

①，②のとき返り点0，③，④のとき返り点1であるという．

返り点0，1以外の動きは考えない．

図で，点Fからは返り点1，その他の点からは返り点0または1の動きとなる．

3）$R_i^j=1$ は動点Pが返り点0または1で動いてもとの点に戻るとき，返り点1の総数が$i$個で，$j$個の比の積が1のこととする．

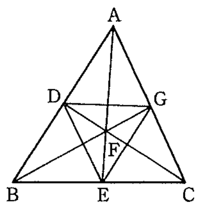
例えば，$R_2^3=1$ は返り点1が2個で3つの比の積が1であることを表す（返り点0は1個）．

## 3. Irisunaの定理

> 左図で，点Pは△ABCの周および内部の線分上を動くものとすると，点A，B，C，D，E，F，Gのどこから動いても再びもとの点に戻るならば，どんなときも動点Pに対応する線分の比の積は1である．

## 4. (Irisunaの) 第2定理

> Irisunaの定理で，動点Pが線分DG，GE，ED上は返り点0で動くものとすると，点A，B，C，D，E，F，Gのどこから動いても，再びもとの点に戻るならば，どんなときも動点Pに対応する線分の比の積は1である．

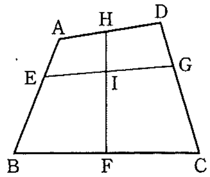



## 5. (Irisunaの) 第3定理

$\sigma(\mathrm{ABCDA})=1$ は

$$\frac{\mathrm{AE}}{\mathrm{EB}}\cdot\frac{\mathrm{BF}}{\mathrm{FC}}\cdot\frac{\mathrm{CG}}{\mathrm{GD}}\cdot\frac{\mathrm{DH}}{\mathrm{HA}}=1 \text{ のこととする．}$$

> 四角形ABCDの辺AB，BC，CD，DA上の点をそれぞれE，F，G，Hとして，$\sigma(\mathrm{ABCDA})=1$ を満たしているとする．また，直線EG，FHはただ1点Iで交わるとする．動点Pが"返り点"0，1で四角形ABCDの周および内

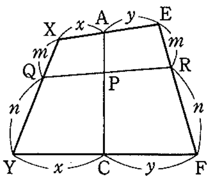


部の線分上を動くものとすると，点 A，B，C，D，E，F，G，H，I のどこから動いても，再びもとの点に戻るならば，どんなときも動点 P に対応する線分の比の積は 1 である．

さて，数研出版新制度研究部会による数研通信特別号 2 ('93. 4) での 2 つの Newton の定理を Irisuna の定理から証明してみたい．

## 6. Newton の定理 (1)

四角形 XYFE において
XQ : QY
　$=$ER : RF
　$=m : n$
XA : AE
　$=$YC : CF
　$=x : y$　とする．




このとき，AP : PC$=m : n$ になる点 P は直線 QR 上にある．

**証明)** QR と AC の交点を P′ とすると

$$\sigma(\mathrm{XYFEX})=\frac{m}{n}\cdot\frac{x}{y}\cdot\frac{n}{m}\cdot\frac{y}{x}=1$$

よって，(Irisuna の) 第 3 定理から

$$\sigma(\mathrm{AC})=\frac{\mathrm{AP'}}{\mathrm{P'C}}=\frac{y}{y+x}\cdot\frac{m}{n}\cdot\frac{x+y}{y}=\frac{m}{n}$$

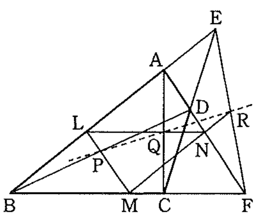
$$\therefore\ \frac{\mathrm{AP}}{\mathrm{PC}}=\frac{\mathrm{AP'}}{\mathrm{P'C}}\ \text{から}\ \mathrm{P}=\mathrm{P'}$$

よって，点 P は直線 QR 上にある．　(証明終)

この Newton の定理は $\sigma(\mathrm{XYFEX})=1$ という条件のもとで，(Irisuna の) 第 3 定理へ拡張される (練習問題参照)．

## 7. Newton の定理 (2)

四角形 ABCD の対辺 AB と CD，AD と BC の延長線上の交点をそれぞれ E，F とする．線分 BD，AC，EF の中点をそれぞれ P，Q，R とすると，P，Q，R は一直線上にある．




**証明)** AB，BF，FA の中点をそれぞれ L，M，N とすると，中点連結定理より点 L，Q，N；L，P，M；M，N，R は一直線上にある．△ LMR(PN)注) で $R_1{}^3=1$ を証明すればよい．

注) (　) の中は分点とする．

△BFA(MDL) で $R_2{}^4=1$ から

$$\frac{\mathrm{LP}}{\mathrm{PM}}=\frac{\mathrm{LB}}{\mathrm{BA}}\cdot\frac{\mathrm{AD}}{\mathrm{DF}}\cdot\frac{\mathrm{FB}}{\mathrm{BM}}=\frac{1}{2}\cdot\frac{\mathrm{AD}}{\mathrm{DF}}\cdot\frac{2}{1}=\frac{\mathrm{AD}}{\mathrm{DF}}\quad\cdots\cdots①$$

△FEB(RAM) で $R_4{}^4=1$ から

$$\frac{\mathrm{MR}}{\mathrm{RN}}=\frac{\mathrm{MF}}{\mathrm{FB}}\cdot\frac{\mathrm{BE}}{\mathrm{EA}}\cdot\frac{\mathrm{AF}}{\mathrm{FN}}=\frac{1}{2}\cdot\frac{\mathrm{BE}}{\mathrm{EA}}\cdot\frac{2}{1}=\frac{\mathrm{BE}}{\mathrm{EA}}\quad\cdots\cdots②$$

△ABF(LCN) で $R_2{}^4=1$ から

$$\frac{\mathrm{NQ}}{\mathrm{QL}}=\frac{\mathrm{NA}}{\mathrm{AF}}\cdot\frac{\mathrm{FC}}{\mathrm{CB}}\cdot\frac{\mathrm{BA}}{\mathrm{AL}}=\frac{1}{2}\cdot\frac{\mathrm{FC}}{\mathrm{CB}}\cdot\frac{2}{1}=\frac{\mathrm{FC}}{\mathrm{CB}}\quad\cdots\cdots③$$

∴ ①×②×③から

$$\frac{\mathrm{LP}}{\mathrm{PM}}\cdot\frac{\mathrm{MR}}{\mathrm{RN}}\cdot\frac{\mathrm{NQ}}{\mathrm{QL}}=\frac{\mathrm{AD}}{\mathrm{DF}}\cdot\frac{\mathrm{FC}}{\mathrm{CB}}\cdot\frac{\mathrm{BE}}{\mathrm{EA}}$$

△BFE で $R_1{}^3=1$ から　　　$=1$

よって，△LMR で $R_1{}^3=1$ が成り立つので，点 P，Q，R は一直線上にある．　(証明終)

注) 第 2 定理からの発展として，成り立つ $R_2{}^4=1$，$R_4{}^4=1$ を証明に使っている．

次に，この Newton 線の拡張を考えたい．つまり一般に点 P，Q，R が一直線上になる条件を求めたい．

①×②×③から (それぞれの第 2 式をかける)

$$\frac{\mathrm{LP}}{\mathrm{PM}}\cdot\frac{\mathrm{MR}}{\mathrm{RN}}\cdot\frac{\mathrm{NQ}}{\mathrm{QL}}$$
$$=\left(\frac{\mathrm{AD}}{\mathrm{DF}}\cdot\frac{\mathrm{FC}}{\mathrm{CB}}\cdot\frac{\mathrm{BE}}{\mathrm{EA}}\right)\cdot\left(\frac{\mathrm{BL}}{\mathrm{LA}}\cdot\frac{\mathrm{AN}}{\mathrm{NF}}\cdot\frac{\mathrm{FM}}{\mathrm{MB}}\right)$$

△ BFE で $R_1{}^3=1$ から

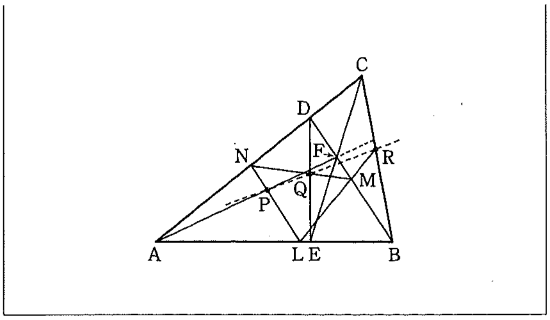
$$=\frac{\mathrm{BL}}{\mathrm{LA}}\cdot\frac{\mathrm{AN}}{\mathrm{NF}}\cdot\frac{\mathrm{FM}}{\mathrm{MB}}=\sigma(\mathrm{BAFB})$$

つまり　$\sigma(\mathrm{BAFB})=1$　が条件となる．

したがって，Irisuna の定理からながめた Newton 線の拡張を定理としてまとめると次のようになる．

## 8. Newton 線の拡張 (Irisuna の定理)

**【定理】** Irisuna の第 2 定理を表す三角形 ABC で，点 D，E，F を図のようにとる．このとき，△ ABD で，$\sigma(\mathrm{ABDA})=1$注) となる点 L，M，N をそれぞれ辺 AB，BD，DA 上にとると，NL と AF；NM と DE；直線 LM と BC のそれぞれの交点 P，Q，R は一直線上にある．




注）$\sigma(\mathrm{ABDA})=1$ は

$$\frac{\mathrm{AL}}{\mathrm{LB}}\cdot\frac{\mathrm{BM}}{\mathrm{MD}}\cdot\frac{\mathrm{DN}}{\mathrm{NA}}=1$$ のこととする．

**証明）** △NLR で $R_1{}^3=1$ を証明する．

△ABD で $R_2{}^4=1$ から

$$\frac{\mathrm{NP}}{\mathrm{PL}}=\frac{\mathrm{NA}}{\mathrm{AD}}\cdot\frac{\mathrm{DF}}{\mathrm{FB}}\cdot\frac{\mathrm{BA}}{\mathrm{AL}} \quad \cdots\cdots ①$$

△BCA で $R_4{}^4=1$ から

$$\frac{\mathrm{LR}}{\mathrm{RM}}=\frac{\mathrm{LB}}{\mathrm{BA}}\cdot\frac{\mathrm{AC}}{\mathrm{CD}}\cdot\frac{\mathrm{DB}}{\mathrm{BM}} \quad \cdots\cdots ②$$

△DAB で $R_2{}^4=1$ から

$$\frac{\mathrm{MQ}}{\mathrm{QN}}=\frac{\mathrm{MD}}{\mathrm{DB}}\cdot\frac{\mathrm{BE}}{\mathrm{EA}}\cdot\frac{\mathrm{AD}}{\mathrm{DN}} \quad \cdots\cdots ③$$

①×②×③から

$$\frac{\mathrm{NP}}{\mathrm{PL}}\cdot\frac{\mathrm{LR}}{\mathrm{RM}}\cdot\frac{\mathrm{MQ}}{\mathrm{QN}}$$

$$=\left(\frac{\mathrm{AC}}{\mathrm{CD}}\cdot\frac{\mathrm{DF}}{\mathrm{FB}}\cdot\frac{\mathrm{BE}}{\mathrm{EA}}\right)\cdot\left(\frac{\mathrm{AN}}{\mathrm{ND}}\cdot\frac{\mathrm{DM}}{\mathrm{MB}}\cdot\frac{\mathrm{BL}}{\mathrm{LA}}\right)$$

△ABC で $R_1{}^3=1$ から

$$=\frac{\mathrm{AN}}{\mathrm{ND}}\cdot\frac{\mathrm{DM}}{\mathrm{MB}}\cdot\frac{\mathrm{BL}}{\mathrm{LA}}=\sigma(\mathrm{ADBA})$$

$\sigma(\mathrm{ABDA})=1$ から　　$=1$

よって，$R_1{}^3=1$ が成り立つので，点 P，Q，R は一直線上にある．　（証明終）

Newton 線はこの拡張で点 L，M，N が中点の場合であることがわかる．また，△ ABD で LM，MN，NL は Irisuna の第 2 定理を表す線分となっていることがわかる．また，この拡張の逆の命題の検討は面白いと思うので，次の練習問題のなかにあげておきました（問題 3）．やってみて下さい．

## 9．練習問題

1）Newton の定理(1)に関して，次の問題を解こう．（6. の図を参照）

**問題**　XQ：QY＝FC：CY＝$m$：$n$

XA：AE＝FR：RE＝$x$：$y$

AC と QR の交点を P とするとき，

AP：PC を求めよ．

2）Newton 線の拡張に関して，次の問題を解こう．（8. の図を参照）

**問題 1**　△AEC(LMN) で，$\sigma(\mathrm{AECA})=1$ ならば，NL と AF；LM と DE；直線 NM と BC のそれぞれの交点 P，Q，R は一直線上にある．このことを証明せよ．

**問題 2**　点 P，Q，R が一直線上になる点 L，M，N はただ 1 通りであることを証明せよ．

ただし，点 L，M，N はそれぞれ辺 AB，BD，DA 上の点とする．

**問題 3**　点 P，Q，R が一直線上にあるならば，点 P，Q，R をそれぞれ通る直線 NL，NM，LM をとって，$\sigma(\mathrm{ABDA})=1$ にできる点 L，M，N を決定する作図法を述べ，$\sigma(\mathrm{ABDA})=1$ を証明せよ．

## 10．成果と今後の課題

数研通信での発表も今回で 5 回目となりました．私としてはそのつど Irisuna の定理に関するオリジナルなものを発表して，専門家ならびに関係者の意見を求めてきましたが，今回の定理についても検討をお願いしたいと思います．また，Irisuna の定理の応用としてのしめちゃんのボール（代表元 20 個）は，Irisuna の定理のモデルとして成果の 1 つと考えます．このあたりの発展も含めて多くの課題が山積しておりますが，とくに教育の現場への具現化の問題が今後の課題であります．

（愛知県立 一宮興道高等学校）

《参　考　文　献》

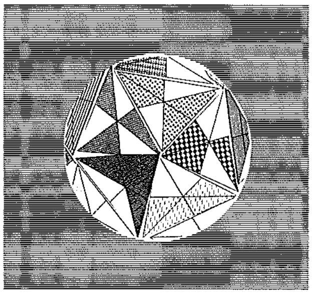
1）岩田至康　編：幾何学大辞典，槙書店
2）清宮俊雄　著：幾何学―発見的研究法―，科学新興社
3）入砂七五三一：“メネラウス・チェバの定理の拡張について”，平成 5 年度県立学校教職員個人研究研究集録（愛知県教育委員会）(1994. 3）
4）　：“メネラウス・チェバの定理の拡張について”，数研通信 19 号，数研出版（1994. 5）
5）　：メネラウスの定理・チェバの定理を含む定理について―Irisuna の定理―，日数教学会誌第 76 巻臨時増刊，日数教三重大会提案資料（1994. 8）
6）　：メネラウスの定理・チェバの定理を含む定理について―Irisuna の定理の発展―，平成 6 年度愛知県高等学校数学研究会尾張地区研究発表大会提案資料（1995. 2）

7）：Irisunaの定理（メネラウスの定理・チェバの定理を含む），（石田教育賞）I.F.Report 第22号，財団法人石田財団（1995. 3）
8）：Irisunaの定理と線束の第3定理（Menelaosの定理・Cevaの定理を含む），イプシロン，愛知教育大学数学教育学会誌第37巻（1995. 3）
9）：Irisunaの定理，数研通信22号，数研出版（1995. 4）
10）：メネラウスの定理・チェバの定理を含む定理について—Irisunaの定理—，研究集録愛数33号（愛知県高等学校数学研究会）（1995. 5）
11）：メネラウスの定理・チェバの定理を含む定理の発展について—Irisunaの定理—，日数教学会誌第77巻臨時増刊，日数教東京大会提案資料（1995. 8）
12）：メネラウスの定理・チェバの定理を含む定理の発展について—Irisunaの定理—，研究集録愛数34号（愛知県高等学校数学研究会）（1996. 5）
13）：球面でのメネラウスの定理・チェバの定理を含む定理について—Irisunaの定理—，日数教学会誌第78巻臨時増刊，日数教長崎大会提案資料（1996.8）
14）：Irisunaの定理と共線定理，共点定理について（Menelaosの定理・Cevaの定理を含む），数研通信27号，数研出版（1997. 1）
15）：球面でのメネラウスの定理・チェバの定理を含む定理について—Irisunaの定理—，研究集録愛数35号（愛知県高等学校数学研究会）（1997. 5）
16）：メネラウスの定理・チェバの定理を含む定理の一般化について—Irisunaの定理—日数教学会誌第79巻臨時増刊，日数教群馬大会提案資料（1997. 8）

## 《参　考　資　料》

**資料1**　★★★★★★★★★★★★★★★★★

Irisunaのボール（しめちゃんのボール）はIrisunaの定理，第2定理を表す代表元20個のimageによって，デザインされている．また，連鎖定理の1つのモデルである．

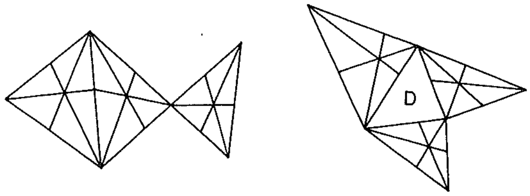


しめちゃんのボール 1993.11. 発表
商標権，意匠権登録済
（ボールの図柄は実物をモデル化したものである）

**資料2　（Irisunaの）連鎖定理**

Irisunaの定理を表す三角形が1辺（3点共有）または互いに頂点（1点共有）で連鎖する図形において，点Pはの周および内部の線分上を動くものとすると，動点Pが再びもとの点に戻るならば，どんなときも動点Pに対応する線分の比の積は1である．

ただし，内部にを含まない領域Dがある場合は，このDの外周に対応する線分の比の積は1になるものとする．




**資料3　$n$角形での線束による分割比の定理（Irisunaの定理）**

$n$角形の内部の点Oから各頂点$A_1$，$A_2$，……，$A_n$への線束が，図のように，$n$角形の各辺上の点$B_1$，$B_2$，……，$B_n$を順に結んでできる$n$角形の辺を分割するとき，

$$\sigma(A_1A_2\cdots\cdots A_nA_1)\cdot\sigma(B_1B_2\cdots\cdots B_nB_1)=1$$

である．