ベルヌイの数および多項式

坂本　茂（さかもと　しげる）

1 自然数の巾和はベルヌイ多項式の演習として導かれているが，ベルヌイは最初に自然数の巾和を類推し帰納的に得たものといわれる．自然数の巾和の考察からベルヌイ多項式を導くことができたので，ここに記したい．

1から n までの自然数についてその m 乗の和を $S_m(n)$ とする．

$$S_m(n)=\sum_{k=1}^{n}k^m=1^m+2^m+3^m+\cdots\cdots+n^m$$

$k^{m+1}-(k-1)^{m+1}$ で最初の n 個の和が n^{m+1} であるから，

$$\begin{aligned}n^{m+1}&=\sum_{k=1}^{n}\{k^{m+1}-(k-1)^{m+1}\}\\&=S_{m+1}(n)+\sum_{r=0}^{m+1}(-1)^{m-r}{}_{m+1}\mathrm{C}_rS_r(n)\\&=(m+1)S_m(n)+\sum_{r=0}^{m-1}(-1)^{m-r}{}_{m+1}\mathrm{C}_rS_r(n)\end{aligned}$$

したがって，$S_m(n)$ は $r<m$ の $S_r(n)$ により次式で表される．

$$S_m(n)=\frac{1}{m+1}\left\{n^{m+1}-\sum_{r=0}^{m-1}(-1)^{m-r}{}_{m+1}\mathrm{C}_rS_r(n)\right\}$$

同様に $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\{(k+1)^{m+1}-k^{m+1}\}=(n+1)^{m+1}-1$ の計算によると

$$S_m(n)=\frac{1}{m+1}\left\{(n+1)^{m+1}-1-\sum_{r=0}^{m-1}{}_{m+1}\mathrm{C}_rS_r(n)\right\}$$

が得られる．

2 この2式の和を取ることにより次の式が得られる．

$$S_{2\mu}(n)=\frac{1}{2(2\mu+1)}\left\{(n+1)^{2\mu+1}+n^{2\mu+1}-1-2\sum_{j=0}^{\mu-1}{}_{2\mu+1}\mathrm{C}_{2j}S_{2j}(n)\right\}$$

$$S_{2\mu-1}(n)=\frac{1}{4\mu}\left\{(n+1)^{2\mu}+n^{2\mu}-1-2\sum_{j=1}^{\mu-1}{}_{2\mu}\mathrm{C}_{2j-1}S_{2j-1}(n)\right\}$$

また，$S_{m+1}(n)$ どうしの差を取って，これとは異なる $S_{2\mu}(n)$，$S_{2\mu-1}(n)$ の式が得られる．これらの式は $S_m(n)$ の漸化式であり直接 n で表されているわけではない．しかし次のようなことを示すには好都合であろう．

$S_m(n)$ は m が偶数のものは偶数のものから，m が奇数のものは奇数のものから得られる．

$\varphi_{2\mu}(n)=(n+1)^{2\mu+1}+n^{2\mu+1}-1-2{}_{2\mu}\mathrm{C}_0S_0(n)$ とすると $\varphi_{2\mu}(0)=\varphi_{2\mu}(-1)=\varphi_{2\mu}\left(-\dfrac{1}{2}\right)=0$ であり，また

$$2(2\mu+1)S_{2\mu}(n)=\varphi_{2\mu}(n)-2\sum_{j=0}^{\mu-1}{}_{2\mu+1}\mathrm{C}_{2j}S_{2j}(n)$$

と書け，帰納法から $S_{2\mu}(n)$ は $\mu\geqq1$ で $n(n+1)(2n+1)$ を因数にもつ．そして

$\varphi_{2\mu-1}(n)=(n+1)^{2\mu}+n^{2\mu}-1-2{}_{2\mu}\mathrm{C}_1S_1(n)$ とすると $\varphi_{2\mu-1}(0)=\varphi_{2\mu-1}(-1)=0$．$\varphi_{2\mu-1}(n)$ を n で微分して

$$\varphi_{2\mu-1}'(n)=2\mu\{(n+1)^{2\mu-1}+n^{2\mu-1}-(2n+1)\}$$

よって $\varphi_{2\mu-1}'(0)=\varphi_{2\mu-1}'(-1)=0$ また

$$4\mu S_{2\mu-1}(n)=\varphi_{2\mu-1}(n)-2\sum_{j=1}^{\mu-1}{}_{2\mu}\mathrm{C}_{2j-1}S_{2j}(n)$$

と書け，帰納法より n の多項式 $S_{2\mu-1}(n)$ は $\mu\geqq2$ で $n^2(n+1)^2$ を因数にもつ．なお，これは微分法を使わなくとも示すことができる．

3 以上の計算から私は長い時間を費やし，2つの重要な示唆を得て以下に述べる $S_m(n)$ を求める素晴らしい方法にたどり着いた．その1つが自然数 n を実数とみて微分することである．しかし結果的にはここでも微分は必要としていないが，微分により意味するところのものが明白になる．何よりも決定的なのはその記法である．最初に得られた $S_m(n)$ 式の中の和の記号 Σ の部分が，二項定理でまとめられそうに見えるのだがどうしてだろうか．

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n}(k+1)^m&=\sum_{k=1}^{n}\sum_{r=1}^{m}{}_m\mathrm{C}_rk^r=\sum_{r=1}^{m}\sum_{k=1}^{n}{}_m\mathrm{C}_rk^r\\&=\sum_{r=1}^{m}{}_m\mathrm{C}_rS_r(n)\end{aligned}$$

ここで仮に $S_r(n)=S(n)^r$ と考えたらどうだろう

か．そうすれば

$$\sum_{k=1}^{n}(k+1)^m=\{S(n)+1\}^m$$

と表記することができる．k が 1 から n まで $(k+1)^{m+1}-k^{m+1}$ の総和をこの記法で表せば $\{S(n)+1\}^{m+1}-S_{m+1}(n)=(n+1)^{m+1}-1$ で示される．この式を展開し $S(n)^r=S_r(n)$ とすれば最初で得た $S_m(n)$ の第 2 式になることは明らかである．

4 それでは，この表記法を使って $S_m(n)$ の式を作る方法を述べよう．

$$\sum_{k=1}^{n}\{k^m-(k-1)^m\}=\sum_{k=1}^{n}k^m-\sum_{k=1}^{n}(k-1)^m=n^m$$

は次の式で表される．

$$S_m(n)-\{S(n)-1\}^m=n^m$$

左辺を展開したとき $S(n)^r=S_r(n)$ としなければならない．ここで n を実数とみてこの式を n で微分するのであるが表記法で $S'(n)^r=S'_r(n)$ と約束しておけば，次のように表記される．

$$S'_m(n)-\{S'(n)-1\}^m=mn^{m-1}$$

$m>1$ のとき $n=0$ とし $S'_m(0)=\{S'(0)-1\}^m$ である．$S'_r(0)$ は n の多項式 $S_r(n)$ で 1 次の係数を表している．これを $\Omega_r=S'_r(0)$ とおくことにする．したがって $\Omega_m=(\Omega-1)^m$ であり，展開したとき $\Omega^r=\Omega_r$ としなければならない．$\Omega_0=S'_0(0)=1$ であり $m\geqq 2$ として $\Omega_m=(\Omega-1)^m$ から Ω_r が定まる．

この Ω_r の関係式を利用して $S_m(n)$ の式を作ることができる．次のような k の多項式の差を考えれば $r=1$ 以外で打ち消し合って

$$\begin{aligned}&(k+\Omega)^{m+1}-(k-1+\Omega)^{m+1}\\&=(k+\Omega)^{m+1}-\{k+(\Omega-1)\}^{m+1}\\&=\sum_{r=0}^{m+1}{}_{m+1}\mathrm{C}_r\{\Omega^r-(\Omega-1)^r\}k^{m+1-r}\\&=(m+1)k^m\end{aligned}$$

となる．なお，注意しておくが $k-1+\Omega$ は $(k-1)+\Omega$，$(k+\Omega)-1$ などとして二項展開しても，多項式の展開は一意的で同じ結果を得る．

$$(k+\Omega)^{m+1}-(k-1+\Omega)^{m+1}=(m+1)k^m$$

ここで k について 1 から n までの和を作れば

$$(n+\Omega)^{m+1}-\Omega^{m+1}=(m+1)S_m(n)$$

となる．勿論，展開においては $\Omega^r=\Omega_r$ とするものである．したがって

$$S_m(n)=\frac{1}{m+1}\sum_{r=0}^{m}{}_{m+1}\mathrm{C}_r\Omega_r n^{m+1-r}$$

と書ける．また $n=1$ とすると $(1+\Omega)^{m+1}-\Omega^{m+1}=m+1$ を得て

$$\Omega_0=1,\ \Omega_m=1-\frac{1}{m+1}\sum_{r=0}^{m-1}{}_{m+1}\mathrm{C}_r\Omega_r\quad(m\geqq 1)$$

5 以上の方法を再考してみる．数列 Ω_r は漸化式 $\Omega^r=(\Omega-1)^r$ の形で定義されていればよいのである．$S_r(n)$ の定数項を $A_r=S_r(0)$ としてみると $S_m(n)-\{S(n)-1\}^m=n^m$ より $m\geqq 1$ で $A_m=(A-1)^m$ となり，Ω_r のときの式と同じである．しかし $m=1$ でも成り立つことから，同じようにして $S_m(n)$ の式を作ることができない．なお，例えば $(A-1)^1=1^0A_1-1^1A_0$ としなければならないことは，この記法で注意を要するところである．実際には $r\geqq 0$ で $A_r=0$ である．

2 回微分して $S_m''(n)-\{S''(n)-1\}^m=m(m-1)n^{m-2}$ となるから $D_r=S_r''(0)$ とおき $m\geqq 3$ で $D_m=(D-1)^m$ となり，やはり Ω_r のときの式と同じである．

$D_0=0$，$D_1=1$ であり

$D^1-(D-1)^1=D_0=0$，$D^2-(D-1)^2=2D_1-D_0=2$

となるから Ω_r のときの方法で

$$(n+D)^{m+2}-D^{m+2}=(m+1)(m+2)S_m(n)$$

を得るから，$S_m(n)$ を次式で表すことができる

$$\begin{aligned}(m+1)(m+2)S_m(n)&=\sum_{r=1}^{m+1}{}_{m+2}\mathrm{C}_rD_rn^{m+2-r}\\&=\sum_{r=0}^{m}{}_{m+2}\mathrm{C}_{r+1}D_{r+1}n^{m+1-r}\end{aligned}$$

Ω_r のときの式の係数と比べれば ${}_{m+2}\mathrm{C}_{r+1}D_{r+1}=(m+2)\,{}_{m+1}\mathrm{C}_r\Omega_r$ であり $r\geqq 0$ で $D_{r+1}=(r+1)\Omega_r$ の関係がある．

6 今度は $(k+1)^m-k^m$ において k についての 1 から n までの和を取ると $\{S(n)+1\}^m-S_m(n)=(n+1)^m-1$ となる．これを n で微分して $\{S'(n)+1\}^m-S_m'(n)=m(n+1)^{m-1}$ となり，$m\geqq 2$ のとき $n=0$ とおき $(\Omega+1)^m-\Omega^m=m$ を得る．ここで $B_r=S_r'(-1)$ とすると $m\geqq 2$ で $(B+1)^m=B^m$ となり，B_0 は 1 である．これにより $S_m(n)$ が得られる．

$$\begin{aligned}&(k+B+1)^{m+1}-(k+B)^{m+1}\\&=\sum_{r=0}^{m+1}{}_{m+1}\mathrm{C}_r\{(B+1)^r-B^r\}k^{m+1-r}\end{aligned}$$

$$(k+B+1)^{m+1}-(k+B)^{m+1}=(m+1)k^m$$

この式が $m\geqq 0$ 整数 k についても成り立つようにするには $0^0=1$ と決めておく必要があることを前

もって指摘しておく．前と同様に k について1から n までの和を作り

$$(n+B+1)^{m+1}-(1+B)^{m+1}=(m+1)S_m(n)$$
$$(n+B)^{m+1}-(1+B)^{m+1}=(m+1)\{S_m(n)-n^m\}$$

そして $m>0$ で

$(m+1)(S_m(n)-n^m)=(n+B)^{m+1}-B^{m+1}$ となる．

$$S_m(n)=n^m+\frac{(n+B)^{m+1}-B^{m+1}}{m+1}$$
$$=\frac{(n+\Omega)^{m+1}-\Omega^{m+1}}{m+1}$$

このことから B_r と Ω_r とは $r=1$ で符号が違うだけで一致することが分かる．また $n\geqq j$ ならば整数 n，j で次の式が成り立つ．

$$\sum_{k=j}^{n}k^m=\frac{(n+1+B)^{m+1}-(j+B)^{m+1}}{m+1}$$
$$=\frac{(n+\Omega)^{m+1}-(j-1+\Omega)^{m+1}}{m+1}$$

しかし，これは $n\geqq j>0$ でなければ

$S_m(n)-S_m(j-1)$ とはならない．

$T_m(n)=\sum_{k=0}^{n-1}k^m$ とすると

$\{T(n)+1\}^m-T_m(n)=n^m$ である．しかし

$\{S(n-1)+1\}^m-S_m(n-1)=n^m-1$ であり

$T_m(n)=S_m(n-1)$ ではないことを示している．

これは $0^0=1$ の取り決めにより $S_0(n-1)=n-1$，$T_0(n)=n$ となるからである．なお $m\geqq 0$ で

$$(m+1)T_m(n)=(n+B)^{m+1}-B^{m+1}$$

$\boxed{7}$ 冒頭で求めた $S_m(n)$ あるいは $S_{2\mu}(n)$，$S_{2\mu-1}(n)$ を微分して $n=0$ を代入し，そのまま Ω_m あるいは $\Omega_{2\mu}$，$\Omega_{2\mu-1}$ の漸化式になる．同じことであるが $(\Omega+1)^m-(\Omega-1)^m=m$ から求めてみよう．

$m=2\mu+1$，$m=2\mu$ として

$$2\sum_{j=0}^{\mu}{}_{2\mu+1}C_{2j}\Omega_{2j}=2\mu+1,\quad 2\sum_{j=0}^{\mu-1}{}_{2\mu}C_{2j+1}\Omega_{2j+1}=2\mu$$

となる．第2の式で $\Omega_1=\frac{1}{2}$ より $\sum_{j=1}^{\mu-1}{}_{2\mu}C_{2j+1}\Omega_{2j+1}=0$

また Ω_3 は0であるから Ω_1 以外の奇数項は $\Omega_{2\mu+1}(=B_{2\mu+1})=0$ である．第1の式が Ω_m を求める式となる．$\Omega_0(=B_0)=1$ だから $\mu\geqq 1$ 対し次の式で $\Omega_{2\mu}(=B_{2\mu})$ が得られる．

$$\sum_{j=1}^{\mu}{}_{2\mu+1}C_{2j}B_{2j}=\mu-\frac{1}{2}$$

また，B_1 以外の奇数項は $B_{2\mu+1}=0$ より $S_m(n)$ は次式で書ける．

$$S_m(n)=\frac{n^{m+1}}{m+1}+\frac{n^m}{2}+\sum_{j=1}^{\left[\frac{m}{2}\right]}{}_mC_{2j-1}\frac{B_{2j}}{2j}n^{m+1-2j}$$

$\boxed{8}$ $(x+B)^m$ を展開し $B^r=B_r$ とした x の多項式を $B_m(x)$ とする．$B_m(0)=B_m$

$$B_m(x)=(x+B)^m=(x-1+\Omega)^m$$

数列は一般に母関数が求められれば扱いやすくなる．

t^n の係数を $\frac{B_n}{n!}(n\geqq 0)$ とする関数 $f(t)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{B_n}{n!}t^n$ を求めたい．まず $(B+1)^{n+1}=B^{n+1}$ を展開して

$\sum_{r=0}^{n}\frac{B_r}{r!(n+1-r)!}=0$，$(n\geqq 1)$ となる．この式の左辺は関数 $f(t)$ と関数 $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{t^n}{(n+1)!}$ との積において t^n の係数を示す．右辺は関数の積で t^n の係数が $n\geqq 1$ で0であることを示す．よって積は B_0 となるから1である．ここで

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{t^n}{(n+1)!}=\frac{1}{t}\left(\sum_{n=0}^{\infty}\frac{t^n}{n!}-1\right)=\frac{e^t-1}{t}$$

となる．したがって $f(t)=\frac{t}{e^t-1}$，すなわち数列 B_n の母関数は

$$\frac{t}{e^t-1}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{B_n}{n!}t^n$$

である．

次に $B_n(x)$ を展開すると

$B_n(x)=(x+B)^n=\sum_{r=0}^{n}{}_nC_rB_rx^{n-r}$ で

$$\frac{B_n(x)}{n!}=\sum_{r=0}^{n}\frac{B_rx^{n-r}}{r!(n-r)!}$$

これは関数 $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{B_n}{n!}t^n=\frac{t}{e^t-1}$ と $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^nt^n}{n!}=e^{xt}$ の積において t^n の係数 $(n\geqq 0)$ を表している．したがって $B_n(x)$ の母関数が得られる．

$$\frac{te^{xt}}{e^t-1}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{B_n(x)}{n!}t^n$$

この母関数によって多項式 $B_m(x)$ は定義し直してよい．すなわち母関数からでも

$$\sum_{n=0}^{\infty}\{B_n(x+1)-B_n(x)\}\frac{t^n}{n!}$$
$$=\frac{t}{e^t-1}\{e^{t(x+1)}-e^{tx}\}$$
$$=te^{tx}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{t^{n+1}x^n}{n!}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{t^nx^{n-1}}{(n-1)!}$$

であるから

$$B_n(x+1)-B_n(x)=nx^{n-1}$$

が得られる．

9 $\{(x+B)^m\}'=m(x+B)^{m-1}$,
$B_m(0)=B_m(1)=B_m$ であるから

$$\frac{d}{dx}B_m(x)=mB_{m-1}(x),$$

$$\int_0^1 B_m(x)dx=0 \qquad (m\geqq 1)$$

となる．これは，$B_0(x)=1$ から始めて次々と $B_m(x)$ を求める関係式であり，これによっても $B_m(x)$ を定義できる．勿論この関係式は母関数からでも得られる．すなわち

$$\frac{d}{dx}\frac{te^{xt}}{e^t-1}=\frac{t^2e^{tx}}{e^t-1}$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}B_n(x)\frac{t^{n+1}}{n!}=\sum_{n=1}^{\infty}B_{n-1}(x)\frac{t^n}{(n-1)!}$$

であるから

$$\frac{d}{dx}B_n(x)=nB_{n-1}(x)$$

である．

さて，$B_n(x)=\varphi_n(x)+c$ とすると

$$\int_0^1 B_n(x)dx=\int_0^1\varphi_n(x)dx+c=0$$

$$B_n(x)=\varphi_n(x)-\int_0^1\varphi_n(x)dx,$$

$$\varphi_n(x)=n\int B_{n-1}(x)dx$$

となり $B_n(x)$ が求められる．まず $B_0(x)=1$ より $\varphi_1(x)=x$ にとれば

$$B_1(x)=x-\int_0^1 xdx=x-\frac{1}{2}$$

となる．ここで $t=x-\frac{1}{2}$ とおくことにすると

$$B_n(x)=\varphi_n(x)-\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}}\varphi_n(x)dt,\ \ \varphi_n(x)=n\int B_{n-1}(x)dt$$

である．

$B_1(x)=t$ より $\varphi_2(x)=2\int t\,dt=t^2$ にとれて

$$B_2(x)=t^2-\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}}t^2dt=t^2-\frac{1}{12}$$

$$B_3(x)=t^3-\frac{t}{4}-\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}}\left(t^3-\frac{t}{4}\right)dt=t^3-\frac{1}{4}t$$

となる．$F_m(t)=B_m(x)$ とし $(m+1)S_m(n)$ は次式になる．

$$B_{m+1}(n+1)-B_{m+1}(1)$$

$$=F_{m+1}\left(n+\frac{1}{2}\right)-F_{m+1}\left(\frac{1}{2}\right)$$

$F_m\left(\frac{1}{2}\right)=F_m\left(-\frac{1}{2}\right)$ は奇数mに対して 0 である．

$S_0(n)=n,\ \ S_1(n)=\frac{1}{2}n(n+1),$

$S_2(n)=\frac{1}{3}S_1(n)(2n+1),\ \ S_3(n)=S_1(n)^2,$

$S_4(n)=\frac{1}{5}S_2(n)(3n^2+3n-1),$

$S_5(n)=\frac{1}{3}S_3(n)(2n^2+2n-1),$

$S_6(n)=\frac{1}{7}S_2(n)(3n^4+6n^3-3n+1),$

$S_7(n)=\frac{1}{6}S_3(n)(3n^4+6n^3-n^2-4n+2),$

$S_8(n)=\frac{1}{15}S_2(n)(5n^6+15n^5+5n^4-15n^3-n^2+9n-3),$

$S_9(n)=\frac{1}{5}S_3(n)(2n^6+6n^5+n^4-8n^3+n^2+6n-3)$

≪数研通信の文献≫

No. 13　結川義明「和の公式 $\sum_{k=1}^{n}k^m$ について」

No. 25　渡邊了梧「自然数の累乗の和を定積分で表示する一考察」

No. 27　坂本　茂「自然数の巾和」

No. 29　加藤政仁「自然数の平方の和 $S_2=\sum_{k=1}^{n}k^2$ について」

（東京都立 新宿高等学校）