極座標と極方程式について

柳田（やなぎだ）　五夫（いつお）

1．はじめに

数学C「いろいろな曲線」の極座標と極方程式の分野における極座標 $(r,\ \theta)$ の扱いが教科書によって異なっている．$r<0$ の場合をきちんと定義している教科書と，曲線の極方程式で $r<0$ となるときの $(r,\ \theta)$ の解釈として説明している教科書がある．

ただし，後者の解釈では基本的な，始線 OX となす角が α である直線の極方程式 $\theta=\alpha$ が半直線になってしまう．

また，$r=2\sin 2\theta$ のように $r<0$ となる場合がある極方程式が存在するから，$r\geqq 0$ の場合に限定してしまう(現実的にはこれで十分な場合が多いが)わけにはいかないと思う．

2．極座標

> 平面上に点Oと半直線 OX を定めると，平面上の任意の点Pの位置は，OP の長さ r と OX から OP へ測った角 θ で決まる．このとき，2つの数の組 $(r,\ \theta)$ を点Pの**極座標**といい，定点Oを**極**，半直線 OX を**始線**，角 θ を**偏角**という．偏角 θ は弧度法で表す．
> 極Oの極座標は，θを任意の数として $(0,\ \theta)$ と定める．
> また，$r<0$ の場合も考えて，例えば $(2,\ \theta+\pi)$ と $(-2,\ \theta)$ は同じ点を表すものとする．
> したがって，ある点Pの極座標は1通りには定まらない．
> しかし，極O以外の点に対して $r>0,\ 0\leqq\theta<2\pi$ と制限すると，Pの極座標 $(r,\ \theta)$ は1通りに定まる．
> 参考文献[1]

> 点Pの極座標が $(r,\ \theta)$ のとき，Pの直交座標は r の符号に関わらず $(r\cos\theta,\ r\sin\theta)$ となる．

［証明］　$r<0$ のとき，Pの極座標は $(-r,\ \theta+\pi)$ と考えられるから，$\mathrm{P}(x,\ y)$ とおくと

$$x=(-r)\cos(\theta+\pi)=r\cos\theta,$$
$$y=(-r)\sin(\theta+\pi)=r\sin\theta$$

となるからである．□

このことから，

> 点Pの極座標が $(r,\ \theta)$，直交座標が $(x,\ y)$ のとき，
> $x=r\cos\theta,\ y=r\sin\theta,\ x^2+y^2=r^2,$
> $\sqrt{x^2+y^2}=\pm r$ となる．

$\sqrt{x^2+y^2}=\pm r$ の正確な表現は

$$\sqrt{x^2+y^2}=\begin{cases} r & (r\geqq 0) \\ -r & (r<0) \end{cases}$$ ということである．

3．極方程式

> ある曲線が極座標 $(r,\ \theta)$ に関する方程式 $r=f(\theta)$ や $F(r,\ \theta)=0$ で表されるとき，この方程式を曲線の**極方程式**という．
> 参考文献[1]

> $\boxed{1}$ 極Oを通り，始線 OX となす角が α である直線の極方程式は
> $$\theta=\alpha$$

［証明］　点Pの極座標が $(r,\ \theta)$，直交座標が $(x,\ y)$ で $\theta=\alpha$ のとき，$x=r\cos\theta=r\cos\alpha$，$y=r\sin\theta=r\sin\alpha$ より，($r<0$ の場合も考えて) r はすべての実数の値をとるから，原点Oを通り，x 軸となす角が α である直線を表す．□

> $\boxed{2}$ 点Aの極座標を $(2,\ 0)$ とする．焦点が極Oで，Aを通り，始線に垂直な直線を準線とする放物線の極方程式を求めよ．

［解1］　放物線上の点を $\mathrm{P}(r,\ \theta)$，Pから準線に下ろした垂線を PH とすると，放物線の性質から

$$\mathrm{PH}=\mathrm{OP}$$

ゆえに　$2-r\cos\theta=r$

よって　$r=\dfrac{2}{1+\cos\theta}$　□

［解２］　放物線の方程式は

$$y^2=-4(x-1)$$

となるから，$x=r\cos\theta$，$y=r\sin\theta$ を代入すると

$$r^2\sin^2\theta=-4r\sin\theta+4r$$
$$r^2(1-\cos^2\theta)=-4r\sin\theta+4r$$
$$r^2\cos^2\theta-4r\cos\theta-r^2+4=0$$
$$r\cos\theta=2\pm r$$
$$\therefore\quad r=\frac{2}{1+\cos\theta},\ \frac{-2}{1-\cos\theta}$$

$r=\dfrac{-2}{1-\cos\theta}$ のとき，$r<0$ であるから，$(r,\ \theta)$ は $r_1=-r$，$\theta_1=\theta+\pi$ とおいた $(r_1,\ \theta_1)$ を表す．

$r=-r_1$，$\theta=\theta_1-\pi$ を $r=\dfrac{-2}{1-\cos\theta}$ に代入すると $-r_1=\dfrac{-2}{1-\cos(\theta_1-\pi)}$ すなわち $r_1=\dfrac{2}{1+\cos\theta_1}$ となり，$r=\dfrac{2}{1+\cos\theta}$ と一致する．

よって，求める極方程式は　$r=\dfrac{2}{1+\cos\theta}$　□

> ３　次の曲線を極方程式で表せ．$x^2+y^2-2x=0$

［注］　$r=0$ の場合も解答に含めた．

［解］　$x^2+y^2-2x=0$ に $x=r\cos\theta$，$y=r\sin\theta$ を代入すると　$r(r-2\cos\theta)=0$

$$\therefore r=0,\ 2\cos\theta$$

$r=0$ に相当する極は $r=2\cos\theta$ に含まれる（例えば $\theta=\dfrac{\pi}{2}$ のとき）から，求める極方程式は

$$r=2\cos\theta$$
□

> ３′ 次の曲線を極方程式で表せ．
> (1) $x=e^\theta\cos\theta$，$y=e^\theta\sin\theta\ (0\leqq\theta\leqq\pi)$
> (2) $x=\cos^2\theta$，$y=\cos\theta\sin\theta\ (0\leqq\theta\leqq\pi)$

［注］　$\sqrt{x^2+y^2}=\pm r$ であるから，$x=r\cos\varphi$，$y=r\sin\varphi$ を利用したほうがよい（この問題では $\varphi=\theta$ ととれる）．

［解］　(1) $x=e^\theta\cos\theta$，$y=e^\theta\sin\theta$ から

$$r=e^\theta$$

となる．

(2) $x=\cos^2\theta=\cos\theta\cdot\cos\theta$，
$y=\cos\theta\sin\theta=\cos\theta\cdot\sin\theta$ から，

$$r=\cos\theta$$

となる．　□

※(2) の結果から，中心 $\left(\dfrac{1}{2},\ 0\right)$，半径 $\dfrac{1}{2}$ の円を表すことがわかるが，$r\geqq0$ として $\sqrt{x^2+y^2}=r$ から極方程式を求める方法だと $r=|\cos\theta|$ となってしまう．

> ４　極方程式 $r=2a(\cos\theta+\sin\theta)$ の表す曲線を直交座標に関する方程式で表し，それがどんな曲線であるかを調べよ．ただし，$a>0$ とする．

［注］　$r=0$ のときもあるので $\cos\theta=\dfrac{x}{r}$, $\sin\theta=\dfrac{y}{r}$ を代入することは避けてみた．

［解］　$r=2a(\cos\theta+\sin\theta)$　……①

$r\neq0$ ならば，①は $r^2=2a(r\cos\theta+r\sin\theta)$ と同値である．

これに，$r^2=x^2+y^2$, $x=r\cos\theta$，$y=r\sin\theta$ を代入すると

$$x^2+y^2=2a(x+y)$$

すなわち

$$(x-a)^2+(y-a)^2=2a^2 \quad\cdots\cdots ②$$

となる．

$r=0$ に相当する極は①にも②にも含まれるから，求める方程式は

$$(x-a)^2+(y-a)^2=2a^2$$

で，中心 $(a,\ a)$，半径 $\sqrt{2}a$ の円である．　□

> ５　極方程式 $r=\dfrac{3}{1+2\cos\theta}$ の表す曲線を直交座標に関する方程式で表し，それがどんな曲線であるかを調べよ．

［注］　$\cos\theta$ の値によっては $r<0$ となる場合がある．

［解］　$r(1+2\cos\theta)=3$ に，
$r=\pm\sqrt{x^2+y^2}$，$x=r\cos\theta$，$y=r\sin\theta$ を代入すると　$\pm\sqrt{x^2+y^2}=3-2x$

となるから，両辺を平方して整理して

$$3x^2-y^2-12x+9=0$$

を得る．よって

双曲線　$(x-2)^2-\dfrac{y^2}{3}=1$ □

※$r=\sqrt{x^2+y^2}$ と限定してしまうと，双曲線

$(x-2)^2-\dfrac{y^2}{3}=1$ の $x\leqq\dfrac{3}{2}$ の部分になってしまう．

> 6 極座標に関する不等式 $r<2\cos\theta$ を満たす点 $(r,\ \theta)$ の存在範囲を求めよ．
>
> 参考文献［2］

［解］　$r<2\cos\theta$ …… ①

(1) $r>0$ のとき，①は $r^2<2r\cos\theta$ と同値である．これに，$r^2=x^2+y^2$, $x=r\cos\theta$, $y=r\sin\theta$ を代入すると

$$x^2+y^2<2x$$

よって　$(x-1)^2+y^2<1$ から $(1,\ 0)$ を中心とする半径1の円の内部となる．

(2) $r<0$ のとき，①は $r^2>2r\cos\theta$ と同値である．これに，$r^2=x^2+y^2$, $x=r\cos\theta$, $y=r\sin\theta$ を代入すると

$$x^2+y^2>2x$$

よって　$(x-1)^2+y^2>1$ から $(1,\ 0)$ を中心とする半径1の円の外部となる．

(3) $r=0$ のとき，①は $0<\cos\theta$ と同値である．この不等式は，例えば $-\dfrac{\pi}{2}<\theta<\dfrac{\pi}{2}$ のとき成り立つ．よって極は不等式を満たす．

(1), (2), (3) から求める範囲は

$(1,\ 0)$ を中心とする半径1の円周上の極以外を除外した範囲となる．□

4．極方程式による積分

極方程式による面積の公式 $S=\displaystyle\int_\alpha^\beta\frac{1}{2}r^2d\theta$ は教科書にはないが，余裕のある生徒には教えておきたい．

> 7 $x=e^\theta\cos\theta$, $y=e^\theta\sin\theta\ (0\leqq\theta\leqq\pi)$ で表される曲線と x 軸とで囲まれた部分の面積を求めよ．

［解1］　$r=e^\theta$ となるから，求める面積 S は

$$S=\int_0^\pi\frac{1}{2}r^2d\theta=\int_0^\pi\frac{1}{2}e^{2\theta}d\theta$$

$$=\frac{1}{4}\Big[e^{2\theta}\Big]_0^\pi=\frac{1}{4}(e^{2\pi}-1)$$

□

［解2］　$\dfrac{dx}{d\theta}=e^\theta(\cos\theta-\sin\theta)$,

$\dfrac{dy}{d\theta}=e^\theta(\sin\theta+\cos\theta)$

増減は下の表のようになるから，

θ	0	$\cdots$	$\frac{\pi}{4}$	$\cdots$	$\frac{3}{4}\pi$	$\cdots$	π
$\frac{dx}{d\theta}$	$+$	$+$	0	$-$	$-$	$-$	$-$
x	1	↗	$\frac{1}{\sqrt{2}}e^{\frac{\pi}{4}}$	↘	$-\frac{1}{\sqrt{2}}e^{\frac{3\pi}{4}}$	↘	$-e^\pi$
$\frac{dy}{d\theta}$	$+$	$+$	$+$	$+$	0	$-$	$-$
y	0	↗	$\frac{1}{\sqrt{2}}e^{\frac{\pi}{4}}$	↗	$\frac{1}{\sqrt{2}}e^{\frac{3\pi}{4}}$	↘	0

求める面積 S は

$$S=\int_{-e^\pi}^{\frac{1}{\sqrt{2}}e^{\frac{\pi}{4}}}y_1dx-\int_1^{\frac{1}{\sqrt{2}}e^{\frac{\pi}{4}}}y_2dx$$

$$=\int_0^\pi-e^\theta\sin\theta\cdot e^\theta(\cos\theta-\sin\theta)d\theta$$

$$=\frac{1}{2}\int_0^\pi e^{2\theta}(1-\cos2\theta-\sin2\theta)d\theta$$

$$=\frac{1}{4}\int_0^{2\pi}e^t(1-\cos t-\sin t)dt\quad(2\theta=t)$$

$$=\frac{1}{4}\int_0^{2\pi}e^tdt-\frac{1}{4}\int_0^{2\pi}e^t(\cos t+\sin t)dt$$

$$=\frac{1}{4}(e^{2\pi}-1)-\frac{1}{4}\Big[e^t\sin t\Big]_0^{2\pi}$$

$$=\frac{1}{4}(e^{2\pi}-1)$$

$$\therefore\quad S=\frac{1}{4}(e^{2\pi}-1)$$

□

参考文献

［1］　高等学校　新編　数学C，数研出版

［2］　数学Ⅲ・C入試問題集1996，数研出版

（栃木県立 栃木高等学校）