第9回　日本数学コンクール

長谷川(はせがわ)　勝夫(かつお)

数学には身近な問題に疑問を抱いたことが出発点となって発展した例がたくさんあります．生徒の勉強や学習ではいろいろなことを記憶することが主で，自分から問題を見つけて考える余裕が少なくなっているのが現状です．このような中で，「おや，どうしてなのだろう」と感じてもらう機会になったりきっかけとなるような問題をいくつか作成しました．これらを通して，問題を解いてゆく道筋を発見するという数学の推理の楽しみを味わってもらいたいというのが，この数学コンクールの出題のねらいです．

今回で9回目を迎えた日本数学コンクールは，昨年(1998年)11月3日に名古屋大学にて開催されました．同時に行われた，小中学生を対象にした「日本ジュニア数学コンクール」も昨年に続いて2回目となりました．ここでは，高校生にチャレンジしてもらった問題とその解説を紹介します．

問題1

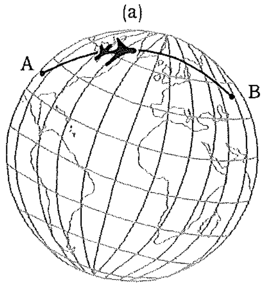
地球上の2点A，B間を人類が移動する手段として，よく飛行機が用いられますが，その経路は図aに示すように，およそ出発地点と到着地点を結ぶ大円(だいえん)の弧になっています．大円とは，球の中心を通る平面で球を切ったときの切り口の円のことですが，手近な球体(例えば地球儀)の上で2点を結ぶ大円の弧を作るためには，その間をぴんと張ったヒモで結べばよろしい．ただし，1つの大円のまわりを何重にも巻いてつなぐことも許し，それらは全部区別して考えることにすると，ぴんと張ったヒモで2点間を結ぶ方法は何通りもあることに注意しましょう．

さて，球面に限らずいろいろな曲面上の2点を，(上のように広い意味で考えた)ぴんと張ったヒモで結んでみたいと思います．小手調べに円錐(えんすい)を選んでみました．円錐の側面上に2点をとって，その間をぴんと張ったヒモで結ぼうというのです．実際に試してみたいので，図bのような円錐で考えましょう．

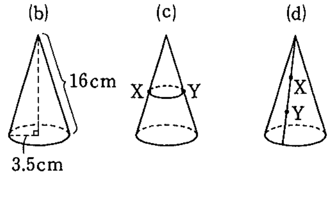
(1)　2点X，Yが図cに示された位置にあるとき，X，Yをぴんと張ったヒモで結ぶ方法は何通りあるでしょうか．
　また，X，Yが図dのような位置にあるときはどうでしょう．
　わかりにくければ，ヒモで結ぶ代わりにXからYまでセロテープをシワができないようにぴったり貼りつけると考えて，実際に円錐を作って試してみましょう．

(2)　本当はここからが問題です．目で見てすぐに分かるように，球面と円錐の側面には違いがたくさんあります．たとえば球面はどの点のまわりも同じ形をしていますが，円錐はそうではなく，とがった点があったりします．実は目に見えない違いもいっぱいあります．
　ぴんと張ったヒモという言葉を使って球面と円錐の違いを言い表してみて下さい．

(a)



(b)　(c)　(d)



(解説)　「測地線」

私たちの身の回りにはいろいろな曲面がありますが，意外とその特徴を考えないことが多く，どちらかといえば，私たちは直線からできている対象に目がゆきやすい傾向があります．しかし，数学では関数などイメージするときは，曲線や曲面が一般的です．この問題では，身近な球面と円錐を例にとり，直線がこれらの曲面上ではどうなるのかを，ヒモで体験しながら，測地線というもので厳密に区別できることを発見させることがねらいです．受験者は球面では，ちょうど向井さんが乗り込んでいるスペースシャトルの軌道を連想するかも知れません．北極と南極のような正反対の点を結ぶ線は無数にあります．実際にヒモをぴんと張ってみると，円錐ではその張り方が何通りかできて，中には戻ってきて交差する場合がありますが，そのような例がわかった受験者は新鮮な驚きがあるはずです．ここでは平面への展開図を考えると手がかりが得られます．

問題２

山と海にはさまれたまっすぐに細長く広がっている町があります．この町にショッピングセンターを２箇所作ることを計画中です．どの人も必ず近い方へ行くとします．このとき，町民全員にとって最も便利な場所はどこか，考えてみましょう．

(1)　手始めに，町民が道路沿いに等間隔に住んでいるとして，場所を決めてください．

(2)　次に，町の中心で最も人口密度が高く，町の中心からの距離に比例して，人口密度が低くなっている場合を考えます．このとき，２箇所のショッピングセンターの位置を決めてください．

(3)　さらに，一般的に人口密度が関数 $f(x)$ で与えられている場合はどうなるでしょうか．ただし，x は町の一方の端からの距離とします．

(解説)　「ショッピングセンター」

都市工学でもいろいろと似たような問題が考えられることから，町の中にショッピングセンターを２箇所作るとして，最も便利な位置をどう決めるかという概念を，数学としてどう捉え，実際にどう扱えばよいか段階的に考えさせる問題です．

受験者は積分を学んでいなくても，距離の総和を最小にするという発想が出れば，２点をずらしながら中点からの距離を平均することで，見当がつくでしょう．さらに，人口密度が一様でなくても，数点をイメージして，各点での人口を重みとした距離の平均を求め，それがどこで最小になるかを計算して位置を求めることができます．３番目はさらに一般化したもので，具体的な都市計画の問題がどのように数式で表されるかという，数学の力を最大限に発揮してもらうための問題です．

問題３

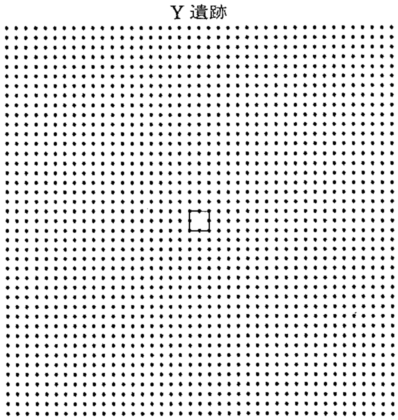
X国のY遺跡には，正方形の平らな土地に，格子状に縦横 10m ごとに直径 120cm の円柱形の柱だけが縦横どちらにも 41 本ずつならんで建っています．従って，一番端の柱の中心から一番端の柱の中心までの距離は 400m という壮大なものです．正方形の中心部分１本の柱は失われていて，そこは広場になっています．

S君：広場中央の柱の跡の中心が遺跡全体の中心．ここに立って周囲を見ると，無数の柱と柱の間から，わずかに遺跡の外の景色が見えて幻想的な光景でしょうね．

I先生：真中に立ってか…．果たしてそうかな．

確かにガイドブックには広場からは柱と柱の間から外が見通せ，遺跡の外の景色がわずかに見えるとありますが，S君の期待通り，広場の**ちょうど中央に立って**，柱の間から空以外の外の景色が見えるのかどうか，考えて下さい．但し，柱の上方には空しか見えないものとします．　[拡大図は略(編集部)]

Y遺跡



□は広場

解説　「遺跡」

これは目の前にたくさんの円柱が格子状に並んでいるときに，それらがどのように視野に入ってくるのだろうかという状況設定を取っていますが，実は四面が鏡でできた正方形の部屋の中心に立った円柱の像がどう見えるかとか，さまざまな言い変えが可能です．中心から最も近い円柱の外側をかすめるように接線を引いて，それを延長させて必ずどれかの円柱と交わることを考え，それを順次ずらしてみる発想もありますが，それだと円柱の数が多過ぎて困ります．そこで中心を通る直線を考えて，柱と柱の隙間を通るための条件を求めると，あるところまで行くまでに必ず円柱の内部を通ることになってしまいます．このことは，n 個の部屋に $(n+1)$ 個の物を入れると，少なくとも１つの部屋には必ず２個以上入るという，数学の部屋割り論法を適用して証明できます．この他にも，違う解答があるかも知れません．

全体講評

（これは，コンクールに参加した生徒へ向けられた文章です）

今回の日本数学コンクールは大きく分けて３つのねらいがありました．その１は，お気づきでしょうが，数学が考える楽しみをもつ学問であることを知ってもらうこと，その２はいつも「どうしてなんだろう」という問いに対してきちんと理由をつけることが出来る考え方が必要であることを知ってもらうこと，その３はこのような理詰めで推理することは身の回りにいくらでもあり，それに対していろいろな見方をして，どんな場合があり得るか想像することがとても大事なことで，それを認識して頂いて実際に考えてもらうことです．

今回参加してくれた皆さんは当然その１はクリアしてくれていますから，熱のこもった答案が多く，採点の先生方も大変苦労なさいました．特に出題に際しては，多くの先生がいろいろと皆さんの可能性を想定したり，学校での進度と照合してあまりに難しすぎないかとか，問題文を正しく読みとってくれるかどうか，挑戦するのにふさわしい問題かどうか，いろんな角度から検討しました．その結果，円錐と球の違いをヒモを使って見つけ出してもらうという**「測地線の問題」**を出題しました．問題を理解すること自体，その２のねらいがある訳ですが，頭の中でイメージすることは，その３の想像力を発揮し，さらに創造へつながるという点で大変に重要で，それをヒモという日常の道具を使って実際に計測し確かめると同時にどうしてという疑問をどんどん掘り下げて，ああそうかと納得できるものに到達した喜びを感じて頂きたいと願って出題したものです．円錐にヒモを巻き付けてみると，ななめに上がって行くつもりがまた下ってくることや，２点を結ぶ直線が１通りではないなど意外性を秘めていて，誰でも確かめることができます．地球儀の上でヒモを考えると，丁度地球をぐるぐると回るスペースシャトルの中にいる向井さんを想像したかも知れませんね．数学ではこのような曲線を測地線といって大変重要なものです．今の季節ではみかんの皮をむくときなどに，どの点も同等であるとか，どうして平面にならないのだろうかと考えたりできますね．その中で中学３年生の男子生徒の答案がセンスがとても良く最も高い評価を得て大賞に選ばれました．

第２問は**「ショッピングセンターの問題」**です．町の構造に頭を悩ます人もいましたが，数学では問題をできるだけ単純化して考えます．本質的なことは何かを見極めることが大切です．この問題は積分に関するもので今回最大の難問です．特に積分はまだ習っていない人が多かったのではないかと思います．でもそのような場合でも考え方を工夫することができます．例えば平均は誰でも知っているものですが，積分をつかわなくても数値が与えられるとすぐ計算できますね．このように知識を最大限に活用して新しい方法を見つけ出す能力はこれからますます重要になりますから，これを参考にして身につけてゆく努力をしてください．

第３問は**「遺跡の問題」**ですが，一見すると代数的に円とそれに接する直線を求め，それを延長して別の円と交わるかどうかを計算したくなると思います．でも円柱の数がとても多くやはり別の考えが必要で，全体を眺めてみると８分の１を考えれば充分とか，円柱が視界に入るとはどういうことか，ある区間の n 個の間隔の区切りを $(n+1)$ 個の円で埋めるとどれかの区画には２個以上入るところがあるとかの発想が要求されます．これは部屋割り論法と呼ばれる証明の１つの方法ですが，数学の楽しみはこのようなエレガントな解法の発見にもあるのです．是非改めて再挑戦してみてください．

付記　第2回日本ジュニア数学コンクール問題

問題1　日本数学コンクール第1問と同じ.

問題2

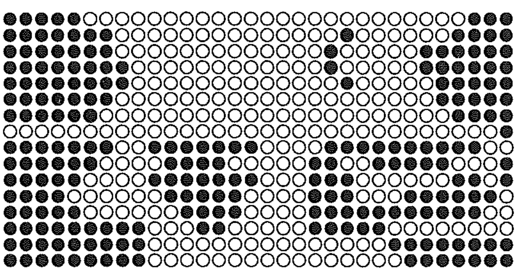
最近ディジタルカメラやファクスの普及には目を見張るものがありますが，そこでは情報圧縮という手法が使われています．普通，画像を白か黒かに限ったとすると，文字でも図形でもこまかく見てみると下の図のように，白と黒のピクセル(画素という)の並んだ集まりになっています．さらに白や黒が何個かずつかたまって続いている場合が多いという性質があります．ここで，画像のサイズは横が32ピクセル，縦が16ピクセルで一定とします．

いま，A君が図のような画像をあなたに送ろうとしています．ただし，ディジタルの世界では，送れるものは0か1の2種類だけに限られています．この場合，○と●しかないので，数字の0と1で置き換えることにより，たとえば第10行目は

1 1 1 1 1 1 0 0 0 0 1 1 1 1 0 0 0 0 0 0 1 1 0 0 1 1 1 1 1 0 0 0 1

のように表せます．このように変換された画像データを基にして，0と1だけからなるデータとして，正直に全ピクセル分を次々に送ってくれれば，32個ごとに区切ってならべることで元の画像を再現できますが，A君はできるだけ少ない0と1の列で送ろうとしています．これが圧縮の意味です．A君が送ってくる内容は0と1しか含んでいませんが，あなたはA君から前もって，どういう規則で送るか知らされているので，その規則に基づいた方法で元の画像を完全に再現(復元)できることになっています．さあ，A君の立場に立ってみて，あなたならこの規則をどのように作って画像を圧縮・復元するでしょうか．あなたの方法で送るとしたら，図の例では32×16よりどれだけ減りますか．

(図)



ヒントその1：問題を整理してみましょう．

(1)　まず，このような画像の情報を送るときに，どんなことを伝えれば，より効率的かを考えてみましょう．

(2)　その伝えたいことを0と1だけで表すにはどうしたら良いでしょうか．その規則を作ると，復元する方法も決めることになりますね．

ヒントその2：たとえば，127までの数を0と1で表そうとすると，$2^7=128$ なので7桁あれば2進数として表すことができます．2進数で表す例をあげると，

0000(=0)，0001(=1)，0010(=2)，
0011(=3)，0100(=4)，0101(=5)，
0110(=6)，0111(=7)，1000(=8)，
1001(=9)，1010(=10)，1011(=11)，

のようになります．ただし，(　)の中は10進数です．つまり，2の何乗かが含まれた数はその1けた上が1になっています．ここで $2^0=1$ です．したがって，2進数の1111101は，普段我々が使っている10進数では，

$$2^6+2^5+2^4+2^3+2^2+1=64+32+16+8+4+1=125$$

となり，7個の0と1で127までの数を伝えることができます．

問題3

Aさんはたくさんの入金伝票を集計して，

368963550円

と計算しましたが，実際の入金はこれより少ない

356464800円

でした．どうも1枚の伝票で何けたかケタ違いをしてしまったようです．何円の入金伝票を何けた間違えてしまったのか当てて下さい．答えは1つとは限らないかもしれません．

こういうことに慣れている先輩のQさんは「まず，差を9で割るんだよ．そして次に…」というのですが，皆さんはどうしますか？

[ヒントのイラストは省略しました(編集部)]

(名古屋大学大学院多元数理科学研究科)

編集部注：この文章は，
「1998日本数学コンクール ～表彰式・講評会～」
の冊子の内容から抜粋し，再構成したものです．