私の数学教材研究ノートから

田島（たじま） 宅二（たくじ）

1．その教材研究の動機

「数研通信」No.26 の p.14 で外処先生が，幼稚園に通っている娘さんが桜の花びらの折り方を教わってきて，この折り方で果たして 36° になるのかどうか計算して欲しいと奥さんからいわれて早速とりかかった報告をされている．何ともほほえましい光景である．すべての学問は人間の生活過程の中から生まれるといわれるが，先生のテーマ「桜の花びらと三角関数」はまさにその実例といっても過言ではない．外処先生の数学教師としての生き方に敬意を表する次第である．

これに比較して私の教材研究は，見るのもあわれな内容であるが，先輩諸氏のご批判をあおぎたい．

高校全入の時代になると生徒の学力の差がはげしく，指導方法や指導工夫を研究していかないと数学離れが知らず知らずのうちに進んでゆく．少し，変わったことをしてみたいというのが，そもそもの発想である．

2．数学Ｉの中の「接線の方程式」

関数 $y=f(x)$ の $x=x_1$ における接線の方程式を求める問題は数学IIに委託されていて数学Ｉで問題にされることは普通はない．ために私も学生時代，微分の学習をしないと接線の方程式は求めることができないと思い込んでいた．もっとも 3 次関数以上だとそれを求めることが(数学Ｉの範囲で)困難であるが，2 次関数であればそれが可能なのである．

> $y=f(x)=ax^2+bx+c\ (a\neq 0)$ 上の x 座標が x_1 である点における接線の方程式を求めてみよう．

◦数学Ｉの場合

その接線の方程式を，$y=px+q$ とおくと，

$$ax^2+bx+c=px+q \quad \cdots\cdots ①$$

$$ax^2+(b-p)x+(c-q)=0$$

重解だから

$$D=(b-p)^2-4a(c-q)=0 \quad \cdots\cdots ②$$

$x=x_1$ を ① に代入して

$$ax_1^2+bx_1+c=px_1+q$$

$$\therefore\ q=ax_1^2+(b-p)x_1+c \quad \cdots\cdots ③$$

③ を ② に代入して

$$p^2-2bp+b^2-4ac+4a\{ax_1^2+(b-p)x_1+c\}=0$$

$$p^2+(-2b-4ax_1)p+(b+2ax_1)^2=0$$

$$\{p-(b+2ax_1)\}^2=0$$

$$\therefore\ p=2ax_1+b \quad \cdots\cdots ④$$

④を③に代入して

$$q=ax_1^2+(b-b-2ax_1)x_1+c$$

$$\therefore\ q=-ax_1^2+c \quad \cdots\cdots ⑤$$

④，⑤ を $y=px+q$ に代入して求める接線の方程式は

$y=(2ax_1+b)x+(-ax_1^2+c)$ となる．

◦数学IIの場合

$f'(x)=2ax+b \qquad \therefore\ f'(x_1)=2ax_1+b$

接点は $(x_1,\ ax_1^2+bx_1+c)$ だから

$$y-(ax_1^2+bx_1+c)=(2ax_1+b)(x-x_1)$$

したがって接線の方程式は，y で解いて

$y=(2ax_1+b)x+(-ax_1^2+c)$ となる．

> $y=f(x)=-2x^2+3x-4$ 上の x 座標が 1 である点における接線の方程式を求めてみよう．

◦数学Ｉの場合

その接線の方程式を $y=px+q$ とおくと

$$-2x^2+3x-4=px+q$$

$$2x^2+(p-3)x+4+q=0$$

$$D=(p-3)^2-8(4+q)=0 \quad \cdots\cdots ①$$

$y=px+q$ は接点 $(1,\ -3)$ を通るから

$-3=p+q \qquad \therefore\ q=-p-3 \quad \cdots\cdots ②$

② を ① に代入してまとめて

$D=(p+1)^2=0 \qquad \therefore\ p=-1,\ q=-2$

$\therefore\ y=-x-2$

◦数学IIの場合

$f'(x)=-4x+3$, $f'(1)=-1$

(1, −3) を通るから　$y+3=-1(x-1)$

$\therefore\ y=-x-2$

3．2次方程式のカルダノ流の解法

カルダノ Cardano (1501〜1576) によって3次方程式の一般的な解法が発見されたことは周知の通りである．カルダノは

$x^3+ax^2+bx+c=0$ において $x=y-\dfrac{a}{3}$ とおいて2次の項のない方程式 $y^3+py+q=0$ に変換して解くことを発見したのである．

2次方程式の解法は，因数分解による解法，平方完成による解法，解の公式による解法等があって今更，カルダノ流による解法などと余分なおせっかいのそしりをまぬがれないかも知れないが，発表することにしよう．

$ax^2+bx+c=0\ (a\neq 0)$

$x^2+\dfrac{b}{a}x+\dfrac{c}{a}=0$　ここで $x=y-p$ とおくと

$$(y-p)^2+\frac{b}{a}(y-p)+\frac{c}{a}=0$$

$$y^2\underset{\sim\sim\sim}{-2py}+p^2+\underset{\sim\sim\sim}{\frac{b}{a}y}-\frac{bp}{a}+\frac{c}{a}=0$$

ここで y の1次の項を消去するための p を求めるために

$-2py+\dfrac{b}{a}y=0$ とおけば $(y\neq 0)$ $p=\dfrac{b}{2a}$

つまり $x=y-\dfrac{b}{2a}$　…… ①

$y+$(軸の方程式の右辺) を代入すれば

$$\left(y-\frac{b}{2a}\right)^2+\frac{b}{a}\left(y-\frac{b}{2a}\right)+\frac{c}{a}=0$$

$$y^2-\frac{b}{a}y+\frac{b^2}{4a^2}+\frac{b}{a}y-\frac{b^2}{2a^2}+\frac{c}{a}=0$$

$y^2=\dfrac{b^2-4ac}{4a^2}$　$\therefore\ y=\pm\dfrac{\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$　…… ②

①，② から $x=\dfrac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$

が得られる．

(例)　$2x^2-5x-12=0$

$$x=y-\frac{-5}{2\times 2}=y+\frac{5}{4}\ \text{を代入して}$$

$$2\left(y+\frac{5}{4}\right)^2-5\left(y+\frac{5}{4}\right)-12=0$$

$$2y^2+5y+\frac{25}{8}-5y-\frac{73}{4}=0$$

$y^2=\dfrac{121}{16}$　$\therefore\ y=\pm\dfrac{11}{4}$

したがって $x=\dfrac{5}{4}\pm\dfrac{11}{4}$

$\therefore\ x=4,\ -\dfrac{3}{2}$

4．平均変化率の計算のバイパス

定義に基づいて導関数を求めるとき，平均変化率の計算に習熟させなければならない．特に2次関数のそれに弾みをつけさせる必要がある．

そこで，$y=ax^2+bx+c$ の $x=n\sim m$ の平均変化率の簡便算であるが，まず対応表を書かせて，

x	n	m
$f(x)$	$f(n)$	$f(m)$

…………………$n<m$とする．

その計算にうつると

$$\frac{f(m)-f(n)}{m-n}=\frac{(am^2+bm+c)-(an^2+bn+c)}{m-n}$$
$$=\frac{a(m^2-n^2)+b(m-n)}{m-n}$$
$$=a(m+n)+b$$

つまり，(x^2 の係数)×(区間の和)+(x の係数) として簡便化する．特に，$a=0$ のとき b となる．

また，$a=b=0$ のとき，0 になる．

1次関数 $(y=0x^2+bx+c,\ b\neq 0)$，2次関数 $(y=ax^2+bx+c,\ a\neq 0)$，定数 $(y=0x^2+0x+c,\ c\neq 0$ または $c=0)$ の平均変化率は，統合的にみて $a(m+n)+b$ といえる．

(例1)　$f(x)=2x^2-3x+4$ の $x=a$ から $x=a+h$ までの平均変化率．

$$\frac{f(a+h)-f(a)}{h}=2(a+a+h)-3$$
$$=2(2a+h)-3$$

(例2)　$f(x)=x^2+2x$ の $f'(a)$．

$$f'(a)=\lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$$
$$=\lim_{h\to 0}\{1(a+h+a)+2\}=2a+2$$

3次関数以上だといっそう複雑になり簡便化は無理であろう．もっとも，$y=ax^3\ (a\neq 0)$ のとき $x=n$ から，$x=m$ までの平均変化率は，

$a(m^2+mn+n^2)$ となるが，生かそうと思えば生かせないということもない．

5．追記

2の「数学Ⅰの中の接線の方程式」であるが，私は「数学Ⅰ」でぜひとも採りあげたいのである．

このような一般化したものは複雑なので，具体例であつかうようにしたい．そして，生徒には，接線の方程式を求めるのは，「数学Ⅱ」で本格的にあつかい，もっとうまいやり方で求められるという示唆をあたえることが大切だと思うのである．

3の「2次方程式のカルダノ流の解法」のなかの $x=y-\dfrac{a}{3}$ の根拠は，$x=y-p$ とおいて原式に代入して　$(y-p)^3+a(y-p)^2+b(y-p)+c=0$

$y^3-3py^2+3p^2y-p^3+ay^2-2apy+ap^2+by-bp+c=0$

y^2 の項を消去するための p を求めるために

$-3py^2+ay^2=0$ とおくと $(y\neq 0)$　$p=\dfrac{a}{3}$

$\therefore$　$x=y-\dfrac{a}{3}$ となる．

なお，1次方程式 $ax+b=0\ (a\neq 0)$ も

$x=y-p$ とおくと $a(y-p)+b=0$

$$ay-ap+b=0$$

y の0次の項を消去するための p を求めるために

$-ap+b=0$ とおくと　$p=\dfrac{b}{a}$

$\therefore$　$x=y-\dfrac{b}{a}$　…… ①

①を原式に代入して $a\left(y-\dfrac{b}{a}\right)+b=0$

$ay-b+b=0$　　$ay=0$

$\therefore$　$y=0$　…… ②

①，②から $x=-\dfrac{b}{a}$

数学研究としては，これもおもしろいと思う．

以上，私の数学教材研究ノートを恥ずかしげもなく開示する次第である．

（静岡県加藤学園高等学校）