アポロニウスの円の中心について

石濱（いしはま） 文武（ふみたけ）

平面上で2点A，Bからの距離の比が定比 $m:n\ (m \neq n)$ である点Pの軌跡は，線分ABをこの比に内分する点Cと外分する点Dを直径の両端とする円(アポロニウスの円)であることはよく知られています．

この円の

中心Kは，線分ABを　$m^2:n^2$　の比に外分する点である

ことを注意したいと思います．

(証明)　複素数平面上でA(z_1)，B(z_2)，C(u)，D(v)，K(w) とおく．

$$u=\frac{nz_1+mz_2}{m+n},\quad v=\frac{-nz_1+mz_2}{m-n}$$

であるから

$$\begin{aligned}w&=\frac{u+v}{2}\\&=\frac{1}{2}\left\{\frac{nz_1+mz_2}{m+n}+\frac{-nz_1+mz_2}{m-n}\right\}\\&=\frac{-n^2z_1+m^2z_2}{m^2-n^2}\end{aligned}$$

(証明終)

(神奈川県立湘南高等学校)