続・両不等式

高橋（たかはし）　敏雄（としお）

1. はじめに

前回，はじめて"両不等式"を用いて，いくつかの2数の大小の問題を解説，紹介した．今回は，2つの関数の大小について考えてみた．両不等式は，現在，試作の段階であり，理論，論理のそれぞれの面で，はたして，間違いがないのか，の確認をまだ得ていない．是非，諸氏からの意見を聞きたいものである．

2. 関数の両不等式

〈定義〉

ある区間において，2つの関数 $f(x)$, $g(x)$ の値の大小が不明であるとき，

$$f(x) <> g(x)$$

と記し，この式を両不等式と呼ぶ．

両不等式の基本的な定理を記す．

$\boxed{1}$「$a<>b \Longrightarrow c<>d$ が真」ならば，その逆「$c<>d \Longrightarrow a<>b$ が真」が成り立つ．

(証)　両不等式においては，等号も含むものとする．「$a<>b \Longrightarrow c<>d$」の対偶「$d<>c \Longrightarrow b<>a$」は真である．すなわち，不等号の向きは同じだから，$c<>d \Longrightarrow a<>b$ としてもよい．

これは，$a<>b \Longrightarrow c<>d$ が成り立てば，逆の $c<>d \Longrightarrow a<>b$ が成り立つことを示している．　■

次に，いくつかの定理を並べておきたい．明らかである場合(既知)については，省略をしている．また，関数は連続 n 回微分可能とする．

$\boxed{2}$　区間$[a,\ b]$で定義された，関数 $f(x)$ について

(i)　常に $f'(x)>0$ (単調増加)のとき

$$a<>b \Longleftrightarrow f(a)<>f(b)$$

(ii)　常に $f'(x)<0$ (単調減少)のとき

$$a<>b \Longleftrightarrow f(b)<>f(a)$$

$\boxed{2}'$　閉区間$[a,\ b]$において，関数 $f(x)$ が $f(a)=0$, 開区間$(a,\ b)$において微分可能のとき

$$f'(x)<>0 \Longrightarrow f(x)<>0$$

$\boxed{3}$　関数 $f(x)$ は，閉区間$[a,\ b]$において，$f(a)=f(b)=0$，開区間$(a,\ b)$において2回微分可能とするとき

$$f''(x)<>0 \Longrightarrow 0<>f(x)$$

$\boxed{3}'$　関数 $f(x)$ は，区間$[a,\ b]$において，$f(a)=g(a)$，$f(b)=g(b)$ とするとき

$$f''(x)<>g''(x) \Longrightarrow g(x)<>f(x)$$

(証)　$F(x)=f(x)-g(x)$ とおく．

条件より，$F(a)=f(a)-g(a)=0$

$F(b)=f(b)-g(b)=0$ かつ，

$F''(x)=f''(x)-g''(x)=0$ が成り立つ．

よって，$\boxed{2}$より $0<>F(x)$ ie. $g(x)<>f(x)$ が成り立つ．　■

問題1　$0 \leqq x \leqq 1$ のとき，$1-x+x^2e^x \leqq e^x$ を示せ．

(解)　$f(x)=1-x+x^2e^x$, $g(x)=e^x$ とおく．

$$f(0)=g(0)=1,\ f(1)=g(1)=e$$

よって，$f(x)<>g(x)$ とおくと，

$f'(x)<>g'(x)$……(意味のない式：棄て式)

$f''(x)<>g''(x)$

$\therefore\ 2e^x+2xe^x+2xe^x+x^2e^x<>e^x$

$\therefore\ 1+4x+x^2<>0$

$x \geqq 0$ より，$1+4x+x^2 \not< >0$

$f''(x) \not< > g''(x)$

$\therefore\ g(x)>f(x)$ ie. $1-x+x^2e^x<e^x$　■

$\boxed{4}$　2つの関数 $f(x)$, $g(x)$ は閉区間$[a,\ b]$において，$f(a)=g(a)$，開区間$(a,\ b)$で微分可能とする．

$$f'(x)<>g'(x) \Longrightarrow f(x)<>g(x)$$

(証)　これは$\boxed{2}'$による．

$F(x)=f(x)-g(x)$ とする．

$F(a)=f(a)-g(a)=0$

また $F'(x)=f'(x)-g'(x)$

もし $f'(x)>g'(x)$ ie. $F'(x)>0$ とすると，$a<x$ より，$F(a)<F(x)$ $\therefore$ $F(x)>0$

$\therefore$ $f'(x)>g'(x) \Longrightarrow f(x)>g(x)$

$F'(x)<0$ とするときも同様に

$f'(x)<g'(x) \Longrightarrow f(x)<g(x)$

$\therefore$ $f'(x)<>g'(x) \Longrightarrow f(x)<>g(x)$ ■

(補題) $\boxed{4}$は，また，次のように拡張できる．

$f(a)=g(a)$ とする．

(i) $x \geqq a$ のとき．$f'(x)<>g'(x) \Longrightarrow f(x)<>g(x)$

(ii) $x \leqq a$ のとき．$f'(x)<>g'(x) \Longrightarrow g(x)<>f(x)$

(証は$\boxed{4}$と同様)

問題 2 $x \geqq 0$ のとき，$\dfrac{x}{1+x} \leqq \log(1+x)$ を示せ．

(解) $f(x)=\dfrac{x}{1+x}$，$g(x)=\log(1+x)$ とおく．

$f(0)=g(0)=0$ より $\dfrac{x}{1+x}<>\log(1+x)$

両辺を x で微分 $\dfrac{1}{(1+x)^2}<>\dfrac{1}{1+x}$

$x \geqq 0$ より，$1+x \geqq 0$ $\therefore$ $1<>1+x$

$\therefore$ $0<>x$ $\therefore$ $0<\not>x$

$\therefore$ $\dfrac{x}{1+x} \leqq \log(1+x)$ (等号は $x=0$ のとき) ■

$\boxed{4}'$ 2つの関数 $f(x)$，$g(x)$ は，開区間 $[a,\ b)$ で n 回微分可能とする．

$f(a)=g(a)$，$f'(a)=g'(a)$，……，

$f^{(n-1)}(a)=g^{(n-1)}(a)$ のとき．

$f^{(n)}(x)<>g^{(n)}(x) \Longrightarrow f(x)<>g(x)$

(証) $\boxed{4}$を繰り返したらよい． ■

このとき，$f'(x)<>g'(x) \Longrightarrow f''(x)<>g''(x)$……

$\Rightarrow f^{(n)}(x)<>g^{(n)}(x) \Longrightarrow f(x)<>g(x)$

問題 3 $0<\theta<\dfrac{\pi}{2}$ のとき，$\theta<\dfrac{1}{2}(\sin\theta+\tan\theta)$ を示せ．

(解) $f(\theta)=\theta$，$g(\theta)=\dfrac{1}{2}(\sin\theta+\tan\theta)$ とおく．

$f(0)=g(0)$ が成り立つ．$\theta<>\dfrac{1}{2}(\sin\theta+\tan\theta)$ の両辺を θ で微分

$$1<>\frac{1}{2}\left(\cos\theta+\frac{1}{\cos^2\theta}\right)$$

$\therefore$ $2\cos^2\theta<>\cos^3\theta+1$

$\therefore$ $0<>\cos^3\theta-2\cos^2\theta+1$

両辺は $\theta=0$ で等しいから，両辺を θ で微分

$0<>3\cos^2\theta\cdot(-\sin\theta)-4\cos\theta\cdot(-\sin\theta)$

$\therefore$ $0<>-3\cos^2\theta\sin\theta+4\sin\theta\cos\theta$

$\therefore$ $3\cos^2\theta\sin\theta<>4\sin\theta\cos\theta$

$0<\theta<\dfrac{\pi}{2}$ より，$\sin\theta\cos\theta>0$ であるから

$3\cos\theta<>4$ $\therefore$ $3\cos\theta<\not>4$

$\therefore$ $\theta<\not>\dfrac{1}{2}(\sin\theta+\tan\theta)$

$\therefore$ $\theta<\dfrac{1}{2}(\sin\theta+\tan\theta)$ ■

問題 4 $x>0$ のとき $\cos x<1-\dfrac{x^2}{2}+\dfrac{x^4}{24}$ を示せ．

(解) $f(x)=\cos x$，$g(x)=1-\dfrac{x^2}{2}+\dfrac{x^4}{24}$ とおく．

$f(0)=g(0)$ より $\cos x<>1-\dfrac{x^2}{2}+\dfrac{x^4}{24}$

x で微分 $-\sin x<>-x+\dfrac{1}{6}x^3$

$\therefore$ $x<>\sin x+\dfrac{1}{6}x^3$

両辺は，$x=0$ のとき，等しくなるから，

x で微分 $1<>\cos x+\dfrac{1}{2}x^2$

更に，$x=0$ で，両辺等しいから，

x で微分 $0<>-\sin x+x$

$\therefore$ $\sin x<>x$

更に，$x=0$ で成り立つから，両辺微分

$\cos x<\not>1$

$\therefore$ $\cos x<\not>1-\dfrac{x^2}{2}+\dfrac{x^4}{24}$

$\therefore$ $\cos x<1-\dfrac{x^2}{2}+\dfrac{x^4}{24}$ ■

問題 5 $x>0$ のとき，任意の自然数について，$e^x>1+\dfrac{x}{1!}+\dfrac{x^2}{2!}+\cdots+\dfrac{x^n}{n!}$ が成り立つことを証明せよ．

(証) 略

$\boxed{5}$ 閉区間 $[a,\ b]$ で，$f(x)$，$g(x)$ は積分可能とする．

$$f(x)<>g(x) \Longrightarrow \int_a^b f(x)dx<>\int_a^b g(x)dx$$

$\boxed{6}$ 2つの数列 $\{a_n\}$，$\{b_n\}$ において，

$\lim_{n\to\infty} a_n=\alpha$，$\lim_{n\to\infty} b_n=\beta$ (収束) とすると

$$a_n<>b_n \Longrightarrow \alpha<>\beta$$

7 $f(x)<>g(x) \Longrightarrow h(x)<>i(x)$ は，$f(x)<>g(x)$ かつ $h(x)<>i(x)$ と考えてよいから，前回の和，差，積，商の公式から，新たな式ができる可能性を含んでいる．それは次回に譲る．

3. おわりに

両不等式が一般的に認知されたとするならば，不等式の証明が，今までよりは，簡単になるのではないか，と思う．実は私としては，そうなることを願うものである．

前回と今回にわたって，両不等式を紹介したが，いずれもまだ，充分完成したとは言えない．また，益々，新しい性質が出てくるやも知れない．その意味からも，多くの諸氏からの意見を期待するものである．

（長崎県立大村高等学校）