定規とコンパスで角の三等分は何通りできるか？

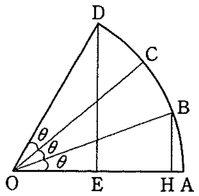
龍山（たつやま）　一郎（いちろう）

§1. はじめに

定規とコンパスを使って，任意の角の二等分ができること，任意の角の三等分はできないことは，すでに知られているが，任意の角の三等分はできないのであって，特定の角，例えば，90°，45° は三等分できることは知られている．ここでは，これ以外に何通りあるか述べてみたいと思う．

§2. 角の三等分について

右図のように，OA$=2$，OE$=a$，OH$=x$，$\angle$DOA$=3\theta$，$\angle$BOA$=\theta$ とおくと



$$\cos 3\theta=\frac{a}{2},\quad \cos\theta=\frac{x}{2}$$

また，

$$\cos 3\theta=4\cos^3\theta-3\cos\theta$$

より $4\left(\dfrac{x}{2}\right)^3-3\left(\dfrac{x}{2}\right)=\dfrac{a}{2}$

$\therefore\quad x^3-3x-a=0$

この a の値を定めて，この 3 次方程式（3 等分方程式）を解けばよいのである．

ここで，$a=2\cos 3\theta$ を代入して解くと

$$x^3-3x-2\cos 3\theta=0$$

$\therefore\quad x^3-3x-2(4\cos^3\theta-3\cos\theta)=0$

これを因数分解すると

$$(x-2\cos\theta)\{x+2\cos(60^\circ+\theta)\}\times\{x+2\cos(60^\circ-\theta)\}=0$$

となり，3 次方程式 $x^3-3x-2\cos 3\theta=0$ の解は $x=2\cos\theta$，$-2\cos(60^\circ+\theta)$，$-2\cos(60^\circ-\theta)$ となる．

この 3 次方程式（3 等分方程式）の解と角の三等分の作図との関係について，角の三等分の作図ができる 90°，45° の場合について，方程式を解くと，

(1) $3\theta=90^\circ$ （$\theta=30^\circ$）

$x^3-3x-2\cos 90^\circ=0$ の解は，

$2\cos 30^\circ$，$-2\cos 90^\circ$，$-2\cos 30^\circ$ となり，

$2\cos 90^\circ=0$ より

$x^3-3x=x(x^2-3)=0$ より $x=0,\ \pm\sqrt{3}$

$\therefore\quad \cos 30^\circ=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ となる．

(2) $3\theta=45^\circ$ （$\theta=15^\circ$）

$x^3-3x-2\cos 45^\circ=0$ の解は，

$2\cos 15^\circ$，$-2\cos 75^\circ$，$-2\cos 45^\circ$ となり，

$2\cos 45^\circ=\sqrt{2}$ より，$x^3-3x-\sqrt{2}=0$ の解の 1 つが $-\sqrt{2}$ であることから，次のように因数分解ができる．

$$x^3-3x-\sqrt{2}=(x+\sqrt{2})(x^2-\sqrt{2}x-1)=0$$

この 2 次方程式 $x^2-\sqrt{2}x-1=0$ を解くと

$$x=\frac{\sqrt{2}\pm\sqrt{2-4(-1)}}{2}=\frac{\sqrt{2}\pm\sqrt{6}}{2}$$

となり，$\cos 15^\circ>\cos 75^\circ$ より

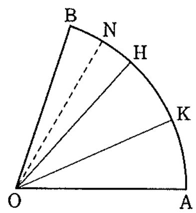
$$\cos 15^\circ=\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4},\quad \cos 75^\circ=\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$$

となる．

このように 3 次方程式（3 等分方程式）が因数分解できることが，角の三等分ができることに関係があるので，次に，正 5 角形の内角 72° について，

まず角 72° の作図については「数研通信」No.29 の「3 次方程式と 3 次関数は親せき」の *p.* 11 を参照して下さい．

点Aを中心として，半径 AO と円Oとの交点をNとすると



$\angle$NOA$=60^\circ$ より

$\angle$BON$=12^\circ$

次に弧 BN をNを中

心として，円Oとの交点をHとし，Hを中心とし，半径HBと円Oとの交点をKとすれば，点K，Hは弧ABの三等分点であり，OK，OHは∠BOAの三等分線である．

次に，3次方程式（3等分方程式）より解くと

(3)　$3\theta=72^\circ$ $(\theta=24^\circ)$　　∠BOA$=72^\circ$

$x^3-3x-2\cos 72^\circ=0$ の解は

$2\cos 24^\circ$，$-2\cos 84^\circ$，$-2\cos 36^\circ$ となる．

ここで，「数研通信」No.29のp.15から

$2\cos 72^\circ=\dfrac{\sqrt{5}-1}{2}$，$2\cos 36^\circ=\dfrac{\sqrt{5}+1}{2}$ より

$x^3-3x-\dfrac{\sqrt{5}-1}{2}=0$ の解の1つが $-\dfrac{\sqrt{5}+1}{2}$ であることから，次のように因数分解できる．

$$x^3-3x-\frac{\sqrt{5}-1}{2}$$
$$=\left(x+\frac{\sqrt{5}+1}{2}\right)\left(x^2-\frac{\sqrt{5}+1}{2}x-\frac{3-\sqrt{5}}{2}\right)=0$$

この2次方程式 $x^2-\dfrac{\sqrt{5}+1}{2}x-\dfrac{3-\sqrt{5}}{2}=0$ を解くと

$$x=\frac{\sqrt{5}+1\pm\sqrt{30-6\sqrt{5}}}{4}$$

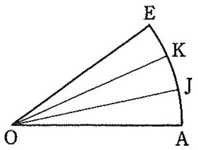
となり　$\cos 24^\circ=\dfrac{\sqrt{5}+1+\sqrt{30-6\sqrt{5}}}{8}$，

$\cos 84^\circ=\dfrac{\sqrt{5}+1-\sqrt{30-6\sqrt{5}}}{8}$

となる．

(4)　$3\theta=36^\circ$ $(\theta=12^\circ)$　∠EOA$=36^\circ$

Kを中心として，半径KEと円Oとの交点をJとすれば点J，Kは弧AEの三等分点であり，OJ，OKは∠EOAの三等分線である．



次に式の上から考えると

$x^3-3x-2\cos 36^\circ=0$ の解は

$2\cos 12^\circ$，$-2\cos 72^\circ$，$-2\cos 48^\circ$ となり

(3)より，$x^3-3x-\dfrac{\sqrt{5}+1}{2}=0$ の解の1つが $-\dfrac{\sqrt{5}-1}{2}$ であることから，次のように因数分解される．

$$x^3-3x-\frac{\sqrt{5}+1}{2}$$
$$=\left(x+\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right)\left(x^2-\frac{\sqrt{5}-1}{2}x-\frac{3+\sqrt{5}}{2}\right)=0$$

この2次方程式 $x^2-\dfrac{\sqrt{5}-1}{2}x-\dfrac{3+\sqrt{5}}{2}=0$ を解くと

$$x=\frac{\sqrt{5}-1\pm\sqrt{30+6\sqrt{5}}}{4}$$

となり　$\cos 12^\circ=\dfrac{\sqrt{5}-1+\sqrt{30+6\sqrt{5}}}{8}$，

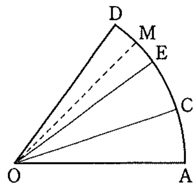
$\cos 48^\circ=\dfrac{-(\sqrt{5}-1)+\sqrt{30+6\sqrt{5}}}{8}$

となる．

次に，前に述べた ∠BOA$=72^\circ$ の四等分点をそれぞれ，D，E，Cとすると，∠DOA$=54^\circ$，∠EOA$=36^\circ$，∠COA$=18^\circ$ となり，作図ができるのであるが，∠DOAをもとにして作図をする．

(5)　$3\theta=54^\circ$ $(\theta=18^\circ)$　　∠DOA$=54^\circ$

∠MOA$=45^\circ$ となる点Mをとり，Mを中心として，半径MDと円Oとの交点をEとし，弧EAの中点をCとすれば，OE，OCが∠DOAの三等分線である．



次に式の上から考えると

$x^3-3x-2\cos 54^\circ=0$ の解は

$2\cos 18^\circ$，$-2\cos 78^\circ$，$-2\cos 42^\circ$ となり

「数研通信」No.29，p.15から

$2\cos 54^\circ=\dfrac{\sqrt{10-2\sqrt{5}}}{2}$，$2\cos 18^\circ=\dfrac{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{2}$

より

$$x^3-3x-\frac{\sqrt{10-2\sqrt{5}}}{2}$$
$$=\left(x-\frac{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{2}\right)\left(x^2+\frac{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{2}x+\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right)$$
$$=0$$

これを解くことにより，他の解

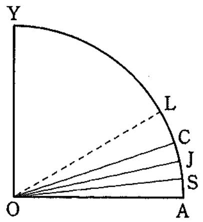
$\cos 42^\circ=\dfrac{\sqrt{10+2\sqrt{5}}+\sqrt{3}(\sqrt{5}-1)}{8}$，

$\cos 78^\circ=\dfrac{\sqrt{10+2\sqrt{5}}-\sqrt{3}(\sqrt{5}-1)}{8}$

を求める．

(6)　$3\theta=18°$ $(\theta=6°)$　　$\angle \mathrm{COA}=18°$

Yを中心として，半径YOの円Oとの交点をLとし，Cを中心とし，半径CLの弧CAとの交点をS，SCの中点をJとすると，OS，OJが$\angle \mathrm{COA}$の三等分線である。



次に式の上から考えると

$x^3-3x-2\cos 18°=0$ の解は

$2\cos 6°$，$-2\cos 66°$，$-2\cos 54°$ となり

(5)より

$$x^3-3x-\frac{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{2}$$
$$=\left(x+\frac{\sqrt{10-2\sqrt{5}}}{2}\right)\left(x^2-\frac{\sqrt{10-2\sqrt{5}}}{2}x-\frac{\sqrt{5}+1}{2}\right)$$
$$=0$$

これを解くことにより，他の解

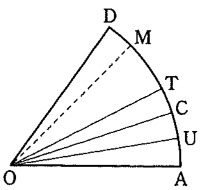
$$\cos 6°=\frac{\sqrt{10-2\sqrt{5}}+\sqrt{3}(\sqrt{5}+1)}{8},$$

$$\cos 66°=\frac{-\sqrt{10-2\sqrt{5}}+\sqrt{3}(\sqrt{5}+1)}{8}$$ を求める。

(7)　$3\theta=27°$ $(\theta=9°)$　　$\angle \mathrm{TOA}=27°$

$$\angle \mathrm{TOA}=\frac{1}{2}\angle \mathrm{DOA}$$
$$=27°$$

から，まず $\angle \mathrm{MOA}=45°$ となる点Mをとり，Tを中心として，半径TMと円Oとの交点をUとし，弧UTの中点をCとすると，OU，OCが$\angle \mathrm{TOA}$の三等分線である。



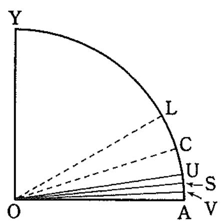
これを式の上で考えると

$x^3-3x-2\cos 27°=0$ の解は

$2\cos 9°$，$-2\cos 69°$，$-2\cos 51°$

(8)　$3\theta=9°$ $(\theta=3°)$　　$\angle \mathrm{UOA}=9°$

Yを中心として，半径YOの円Oとの交点をLとし，また，Cを中心とし，半径CLの弧CAとの交点をS，SAの中点をVとすると，OV，OSが$\angle \mathrm{UOA}$の三等分線である。



これを式の上で考えると $x^3-3x-2\cos 9°=0$ の解は

$2\cos 3°$，$-2\cos 63°$，$-2\cos 57°$

となる。

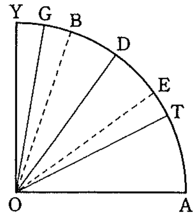
(9)　$3\theta=81°$ $(\theta=27°)$　　$\angle \mathrm{GOA}=81°$

$$\angle \mathrm{GOB}=\frac{1}{2}\angle \mathrm{YOB}$$

より $\angle \mathrm{GOA}=81°$

まず，$\angle \mathrm{EOA}=\frac{1}{2}\angle \mathrm{BOA}$

をとり，Eを中心に半径BYをEY上に，また同じくEを中心に半径YGをEA上にとり，それぞれD，Tとすると OD，OTが$\angle \mathrm{GOA}$の三等分線である。

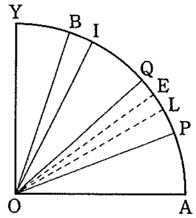


(10)　$3\theta=63°$ $(\theta=21°)$　　$\angle \mathrm{IOA}=63°$

まず，$\angle \mathrm{EOA}=\frac{1}{2}\angle \mathrm{BOA}$

をとり，$\angle \mathrm{YOE}$の二等分線をOIとすると，$\angle \mathrm{IOA}=63°$

次に，Yを中心として，半径YOの円Oとの交点をLとし，また，Eを中心とし，半径ELの弧EIとの交点をQ，弧AQの中点をPとすると，OP，OQが$\angle \mathrm{IOA}$の三等分線である。



(9)，(10)を式の上で考えると

(9)　$x^3-3x-2\cos 81°=0$ の解は

$2\cos 27°$，$-2\cos 87°$，$-2\cos 33°$，

(10)　$x^3-3x-2\cos 63°=0$ の解は

$2\cos 21°$，$-2\cos 81°$，$-2\cos 39°$

となる。

(7)，(8)，(9)，(10)の余弦の真数については，*p.* 23に表にまとめました。また，(3)，(4)，(5)，(6)の余弦の真数については，同表と表示形式が異なっていますが同値です。

このように，角の三等分ができるのは，３次方程式（３等分方程式）が３つの１次式の積に因数分解ができることが，必要であると思われ，また，作図については，そのいずれも，30°，60°（または45°）を

媒介として，三等分が可能となっている．

以上から，角の大きさが 9 の倍数 $(0°<3\theta\leqq 90°)$ であれば，角の三等分が可能であることがいえたが，角の大きさが $90°$ より大きい角 $99°$，$108°$，$117°$，$126°$，$135°$，$144°$，$153°$，$162°$，$171°$，$180°$ については，例えば　$3\theta=108°$　では

$x^3-3x-2\cos 108°=0$ の解は

$2\cos 36°$，$-2\cos(60°+36°)$，$-2\cos(60°-36°)$

で

$\cos 108°=-\cos 72°$，$-2\cos(60°+36°)=2\cos 84°$

となりいずれも，余弦の角を $0°$〜$90°$ の角に表すことができるので，$90°$ より大きい角についても，因数分解できる．よって，三等分の作図が可能であり，$180°$ より大きい角についても，同様のことがいえるので，ここでは，9 の倍数 $(0°<3\theta\leqq 90°)$ とする．

次に，また，別の方法で考える．

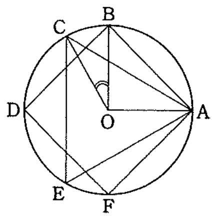
三等分式　$\dfrac{3\theta}{n}a+\dfrac{\theta}{n}b=\dfrac{3a+b}{n}\theta$

ただし　n：正 n 角形，$n=3a+b$，　$3\theta=360°$

a は正の整数，$b=\pm 1$　　とする．

1.　$a=1$，$b=1$，$n=4$

$$\frac{360°}{4}+\frac{120°}{4}=120° \quad \therefore\ 120°-\frac{360°}{4}=\frac{360°}{12}$$



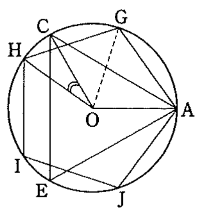
この式を，右図より考えると，正 3 角形 ACE，正方形 ABDE はいずれも円Oに内接しており，中心角 $\angle$COA$=120°$，$\angle$BOA$=90°$　で

$\angle$COB$=120°-90°$　となり正 12 角形の中心角となっている．

2.　$a=2$，$b=-1$，$n=5$

$$\frac{360°}{5}\times 2+\frac{120°}{5}\times(-1)=120°$$

$$\therefore\ \frac{360°}{5}\times 2-120°=\frac{360°}{15}$$



前と同様に考えると

正 5 角形 AGHIJ は円Oに内接しており，その中心角は $\angle$GOA$=72°$ であり

$72°\times 2=\angle$HOA である．

$$\therefore\ \angle \mathrm{HOC}=72°\times 2-120°=24°\left(=\frac{360°}{15}\right)$$

となり，正15角形の中心角となっている．

3.　$a=2$，$b=1$，$n=7$

$$\frac{360°}{7}\times 2+\frac{120°}{7}=120°$$

$$\therefore\ 120°-\frac{360°}{7}\times 2=\frac{360°}{21}$$

4.　$a=3$，$b=-1$，$n=8$

$$\frac{360°}{8}\times 3+\frac{120°}{8}\times(-1)=120°$$

$$\therefore\ \frac{360°}{8}\times 3-120°=\frac{360°}{24}$$　(正 24 角形)

5.　$a=3$，$b=1$，$n=10$

$$\frac{360°}{10}\times 3+\frac{120°}{10}=120°$$

$$\therefore\ 120°-\frac{360°}{10}\times 3=\frac{360°}{30}$$　(正 30 角形)

6.　$a=4$，$b=-1$，$n=11$

$$\frac{360°}{11}\times 4+\frac{120°}{11}\times(-1)=120°$$

$$\therefore\ \frac{360°}{11}\times 4-120°=\frac{360°}{33}$$

7.　$a=4$，$b=1$，$n=13$

$$\frac{360°}{13}\times 4+\frac{120°}{13}=120°$$

$$\therefore\ 120°-\frac{360°}{13}\times 4=\frac{360°}{39}$$

8.　$a=5$，$b=-1$，$n=14$

$$\frac{360°}{14}\times 5+\frac{120°}{14}\times(-1)=120°$$

$$\therefore\ \frac{360°}{14}\times 5-120°=\frac{360°}{42}$$

9.　$a=5$，$b=1$，$n=16$

$$\frac{360°}{16}\times 5+\frac{120°}{16}=120°$$

$$\therefore\ 120°-\frac{360°}{16}\times 5=\frac{360°}{48}$$　(正 48 角形)

10.　$a=6$，$b=-1$，$n=17$

$$\frac{360°}{17}\times 6+\frac{120°}{17}\times(-1)=120°$$

$$\therefore\ \frac{360°}{17}\times 6-120°=\frac{360°}{51}$$

「数研通信」No.29 の $p.$14 より正 17 角形 AP$_1$P$_2\cdots$P$_{16}$ の 1 つの中心角 $\angle \mathrm{P_1OA}=\dfrac{360°}{17}$ である．

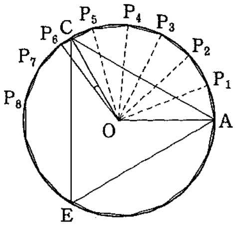
$\angle P_6OA = \angle P_1OA \times 6$

から,

$\angle P_6OC = \angle P_6OA - \angle COA$

$= \dfrac{360°}{17} \times 6 - 120°$

$= \dfrac{360°}{51}$ より,



正 51 角形の中心角である.

11. $a=6,\ b=1,\ n=19$

$$\frac{360°}{19} \times 6 + \frac{120°}{19} = 120°$$

$$\therefore\ 120° - \frac{360°}{19} \times 6 = \frac{360°}{57}$$

12. $a=7,\ b=-1,\ n=20$

$$\frac{360°}{20} \times 7 + \frac{120°}{20} \times (-1) = 120°$$

$$\therefore\ \frac{360°}{20} \times 7 - 120° = \frac{360°}{60}$$ (正 60 角形)

以上(3)〜(9), (11), (12)の作図については, 省略したが, (1), (2), (10)からもわかるように, いずれも, 120° すなわち, 円に内接する正 3 角形の中心角を基準にして, 三等分されているのである.

§3. まとめ

これらのことを, まとめると次のように表される. ただし, 正の整数は小さい順に, 分数は分母の小さい順に書くことにし, 90° 以下とする.

1. はじめの角が作図でき, 三等分の作図ができる.

9°, 18°, 27°, 36°, 45°, 54°, 63°, 72°, 81°, 90°, $\dfrac{360°}{16}$, $\dfrac{360°}{17}$, $\dfrac{360°}{32}$, $\dfrac{360°}{34}$, $\dfrac{360°}{64}$, $\dfrac{360°}{68}$, $\dfrac{360°}{80}$, $\dfrac{360°}{85}$, ……

2. はじめの角は作図ができるが, 三等分の作図はできない.

3°, 6°, 12°, ……など 3 の倍数であり, 9 の倍数でない角 $\dfrac{360°}{48}$, $\dfrac{360°}{51}$, ……

$\left(\dfrac{360°}{48}\text{ は }\dfrac{360°}{16}\text{ の }\dfrac{360°}{51}\text{ は }\dfrac{360°}{17}\text{の三等分である}\right)$

3. はじめの角は作図できないが (もし作図ができたならば), 三等分の作図ができる.

$\dfrac{360°}{7}$, $\dfrac{360°}{11}$, $\dfrac{360°}{13}$, $\dfrac{360°}{14}$, $\dfrac{360°}{19}$, $\dfrac{360°}{22}$, ……

4. はじめの角の作図もできないし (もし作図できても) 三等分の作図もできない.

1°, 2°, 4°, 5°, 7°, 8°, 10°, 11°, 20°, 40°, 80°, $\dfrac{360°}{21}$, $\dfrac{360°}{27}$, $\dfrac{360°}{33}$, $\dfrac{360°}{39}$, $\dfrac{360°}{42}$, $\dfrac{360°}{54}$, $\dfrac{360°}{63}$, $\dfrac{360°}{81}$, ……

上記以外の整数および小数の角

§4. おわりに

以上 定規とコンパスによる角の三等分について述べたが, 実用の面については, 分度器を使用すればよいから, 何ら不自由はしないのであるが, 45°, 90° の角が三等分できるのであるから, 他の角も三等分できるのがあるだろうかと考えた次第である.

ところが, 一般に, 定規とコンパスによる角の n 等分の作図については, 円に内接する正 n 角形の作図に関係があることがわかり, 「付. 角の n 等分の作図について」をつけ加えたいと思う.

付. 角の n 等分の作図について

五等分式 $\dfrac{5\theta}{n}a + \dfrac{\theta}{n}b = \dfrac{5a+b}{n}\theta$

ただし n : 正 n 角形, $n=5a+b$, $5\theta=360°$

a は正の整数, $b=\pm1,\ \pm2$ とする.

1. $a=1,\ b=-2,\ n=3$

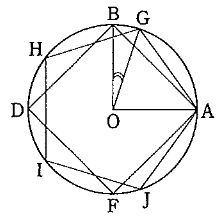
$$\frac{360°}{3} + \frac{72°}{3} \times (-2) = 72°$$

$$\therefore\ \frac{360°}{3} - 72° = \frac{360°}{15} \times 2$$ (正 15 角形)

2. $a=1,\ b=-1,\ n=4$

$$\frac{360°}{4} + \frac{72°}{4} \times (-1) = 72° \quad \therefore\ \frac{360°}{4} - 72° = \frac{360°}{20}$$

この式を, 右図より考えると, 正 5 角形 AGHIJ, 正方形 ABDE はいずれも円 O に内接しており, 中心角 $\angle GOA = 72°$, $\angle BOA = 90°$ で, $\angle BOG = 18°$ で正 20 角形の中心角となっている.



3. $a=1,\ b=1,\ n=6$

$$\frac{360°}{6} + \frac{72°}{6} = 72° \quad \therefore\ 72° - \frac{360°}{6} = \frac{360°}{30}$$ (正 30 角形)

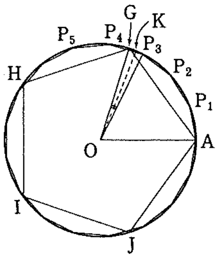
4. $a=1,\ b=2,\ n=7$

$$\frac{360°}{7} + \frac{72°}{7} \times 2 = 72° \quad \therefore\ 72° - \frac{360°}{7} = \frac{360°}{35} \times 2$$

5.　$a=3$，$b=2$，$n=17$

$$\frac{360^\circ}{17}\times 3+\frac{72^\circ}{17}\times 2=72^\circ$$

$$\therefore\quad 72^\circ-\frac{360^\circ}{17}\times 3=\frac{360^\circ}{85}\times 2$$



前と同様に，正 5 角形と正 17 角形 $AP_1P_2\cdots\cdots P_{16}$ より，$\angle P_1OA\times 3$

$=\angle P_3OA=\dfrac{360^\circ}{17}\times 3$

である．また $\angle GOA=72^\circ$ から $\angle GOP_3$ の二等分線の円 O との交点を K とすると

$\angle GOP_3=\angle GOK\times 2$

$\therefore\quad \angle GOA-\angle P_1OA\times 2=\angle GOK\times 2$ となり

$\angle GOK$ は，正 85 角形の中心角である．

ところが，実際は二等分線を利用しない描き方で数研通信 No.29 の $p.15$ による方法の方がよい．

$$\left(\frac{360^\circ}{7}\times 7-72^\circ\times 2=\frac{360^\circ}{85}\right)$$

この方法も，三等分のときと同様に正 5 角形の中心角 72° を基準にして，五等分している．

以上から，考えられることは

1.　円に内接する正 n 角形を描くことができること．
2.　任意の角の二等分ができる．ことから

$n=2^a$，$3\cdot 2^a$，$5\cdot 2^a$，$3\times 5\cdot 2^a$，$17\cdot 2^a$，……

($a=0$，1，2，……) と考えられる．

(元大分県立国東高等学校)

3 角関数値のまとめ

cos 3θ		cos θ		cos(60°+θ)		cos(60°−θ)	
9°	$\frac{\sqrt{3+\sqrt{5}}+\sqrt{5-\sqrt{5}}}{4}$	3°	$\frac{(\sqrt{3}+1)\sqrt{5+\sqrt{5}}+(\sqrt{3}-1)\sqrt{3-\sqrt{5}}}{8}$	63°	$\frac{\sqrt{5+\sqrt{5}}-\sqrt{3-\sqrt{5}}}{4}$	57°	$\frac{(\sqrt{3}-1)\sqrt{5+\sqrt{5}}+(\sqrt{3}+1)\sqrt{3-\sqrt{5}}}{8}$
18°	$\frac{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{4}$	6°	$\frac{\sqrt{3}(\sqrt{5}+1)+\sqrt{10-2\sqrt{5}}}{8}$	66°	$\frac{\sqrt{3}(\sqrt{5}+1)-\sqrt{10-2\sqrt{5}}}{8}$	54°	$\frac{\sqrt{10-2\sqrt{5}}}{4}$
27°	$\frac{\sqrt{5+\sqrt{5}}+\sqrt{3-\sqrt{5}}}{4}$	9°	$\frac{\sqrt{3+\sqrt{5}}+\sqrt{5-\sqrt{5}}}{4}$	69°	$\frac{(\sqrt{3}+1)\sqrt{5-\sqrt{5}}-(\sqrt{3}-1)\sqrt{3+\sqrt{5}}}{8}$	51°	$\frac{(\sqrt{3}+1)\sqrt{3+\sqrt{5}}-(\sqrt{3}-1)\sqrt{5-\sqrt{5}}}{8}$
36°	$\frac{\sqrt{5}+1}{4}$	12°	$\frac{\sqrt{5}-1+\sqrt{30+6\sqrt{5}}}{8}$	72°	$\frac{\sqrt{5}-1}{4}$	48°	$\frac{-(\sqrt{5}-1)+\sqrt{30+6\sqrt{5}}}{8}$
45°	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	15°	$\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$	75°	$\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$	45°	$\frac{\sqrt{2}}{2}$
54°	$\frac{\sqrt{10-2\sqrt{5}}}{4}$	18°	$\frac{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{4}$	78°	$\frac{-\sqrt{3}(\sqrt{5}-1)+\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{8}$	42°	$\frac{\sqrt{3}(\sqrt{5}-1)+\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{8}$
63°	$\frac{\sqrt{5+\sqrt{5}}-\sqrt{3-\sqrt{5}}}{4}$	21°	$\frac{(\sqrt{3}+1)\sqrt{3+\sqrt{5}}+(\sqrt{3}-1)\sqrt{5-\sqrt{5}}}{8}$	81°	$\frac{\sqrt{3+\sqrt{5}}-\sqrt{5-\sqrt{5}}}{4}$	39°	$\frac{(\sqrt{3}-1)\sqrt{3+\sqrt{5}}+(\sqrt{3}+1)\sqrt{5-\sqrt{5}}}{8}$
72°	$\frac{\sqrt{5}-1}{4}$	24°	$\frac{\sqrt{5}+1+\sqrt{30-6\sqrt{5}}}{8}$	84°	$\frac{\sqrt{5}+1-\sqrt{30-6\sqrt{5}}}{8}$	36°	$\frac{\sqrt{5}+1}{4}$
81°	$\frac{\sqrt{3+\sqrt{5}}-\sqrt{5-\sqrt{5}}}{4}$	27°	$\frac{\sqrt{5+\sqrt{5}}+\sqrt{3-\sqrt{5}}}{4}$	87°	$\frac{(\sqrt{3}+1)\sqrt{3-\sqrt{5}}-(\sqrt{3}-1)\sqrt{5+\sqrt{5}}}{8}$	33°	$\frac{(\sqrt{3}+1)\sqrt{5+\sqrt{5}}-(\sqrt{3}-1)\sqrt{3-\sqrt{5}}}{8}$
90°	0	30°	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	90°	0	30°	$\frac{\sqrt{3}}{2}$