行列のある応用

── 数学Cの行列の内容を豊かにするために ──

仁平(にへい) 政一(まさかず)

§1. はじめに

数学Cでの行列の応用の内容は，1次変換がなくなったため，連立方程式を解くことが主である．

そのため，せっかく行列の積を学んでも，その応用としては，どの教科書も

(1) 行列の巾乗の計算

(2) 逆行列を利用して連立方程式を解く

等に終始している．

行列の応用の豊かさを考えるなら，上記の内容だけでは何か物足りなさを感じる．また，生徒に「行列」は面白い，あるいは行列には「こんな応用もあるのか」などと興味・関心を持たせる観点から考えても不十分である．

そこで，本稿では，行列の積の応用として生徒の興味・関心を引くことができ，しかもそれほど事前準備を必要としない教材開発例とその簡単な実践例について述べる．

§2. 教材開発例

(1) 準備

ここでは，指導する際必要とする最小限度の事柄について述べる．

図1のように点と線(直線とは限らない)からできている図形を考える(このような図形はグラフと呼ばれている)．

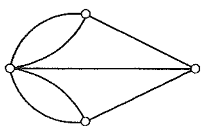

図1

2点を結ぶ線を，たとえ曲がっていても，辺と呼ぶことにする．いま，図形Gの点集合が$\{u_1, u_2, \cdots\cdots, u_n\}$であるとき，$G$の(隣接)行列$A$とは，$ij$要素が点$u_i$と$u_j$を結ぶ辺の本数を表す$n$行$n$列の行列のことである．上の図形の点を時計と反対周りにu_1，u_2，u_3，u_4とすると(図2参照)，

$$A=\begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

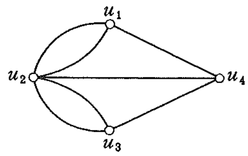

図2

となる．

図形Gの点集合を$\{u, v, w, \cdots\cdots\}$とするとき，$u$で始まり$v$で終わるような点と辺が交互に現れる有限列のことを$G$の$u$-$v$歩道という．歩道の長さとは辺の個数のことである．

例えば，図3において，長さ2のu_1-u_2歩道は

$$u_1e_7u_4e_3u_2$$

である．なお，長さ2のu_1-u_1歩道は$u_1e_1u_2e_1u_1$等5本あることに注意されたい．

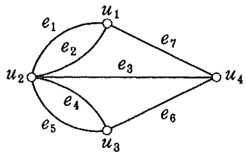

図3

このとき，グラフ理論で，よく知られている次の定理が成り立つ．

> **定理** グラフGの点集合を$V(G)=\{v_1, \cdots\cdots, v_p\}$とし，$G$の隣接行列を$A$とする．このとき，$A^n\ (n\geqq 1)$の$(i, j)$要素を$a_{ij}^{(n)}$とすれば，$a_{ij}^{(n)}$は$G$内の長さ$n$の異なる歩道の個数に等しい．

さて，図4の図形はループとよばれている．

この術語を用いると，上の定理より次の系がえられる．

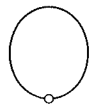

図4

> **系** グラフGがループをもたないとき，A^3の主対角線の要素の和の$\dfrac{1}{6}$はGの三角形の個数に等しい．

定理と系の証明については紙面の都合上省略するので，文献1，あるいは2を参照されたい．

実際の指導にあたっては，定理や系の内容については一切触れない方がよい．

それらを，生徒に気づかせることに，この教材の面白さがある．したがって，指導するにあたって準備することは，グラフ，その隣接行列，歩道という概念だけを押さえておけばよい．

それでは，教材開発例について述べよう．

(2) 教材開発例

簡単に隣接行列や歩道等の用語の説明を行ったあと次のような問題を考えさせる．

問題 右の図形Gについて，次の問いに答えよ．

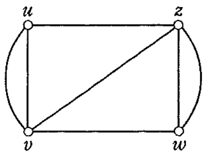

図5

(1) 図形Gの(隣接)行列Aを求めよ．

(2) 点u，v，w，zから出ている次数(辺の数)を求めよ．

(3) A^2を求めよ．

(4) 長さ2の異なるu-u歩道，u-v歩道の個数をそれぞれ求めよ．また，長さ2の異なるu-w歩道，u-z歩道の個数も求めよ．

(5) (3)の成分と(4)の結果を比較して，両者の間の関係を予想せよ．

(6) (5)の予想が正しいことを証明せよ．

(7) 図形G内の長さ2の歩道の総数を求めよ．

(8) A^3を求めよ．

(9) A^3の対角線上の要素の和と図形Gの三角形の個数との関係を見つけよ．

念のため略解をつけておこう．

略解

(1) $A=\begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$

(2) 3，4，3，4

(3) $A^2=\begin{pmatrix} 5 & 1 & 4 & 2 \\ 1 & 6 & 2 & 4 \\ 4 & 2 & 5 & 1 \\ 2 & 4 & 1 & 6 \end{pmatrix}$

(4) 5，1，4，2

(5)，(6) 略

(7) $12+13+12+13=50$

(8) $A^3=\begin{pmatrix} 4 & 16 & 5 & 14 \\ 16 & 8 & 14 & 11 \\ 5 & 14 & 4 & 16 \\ 14 & 11 & 16 & 8 \end{pmatrix}$

(9) $\frac{1}{6}$(対角線上の要素の和)

$=$図形Gの三角形の個数$=4$

§3．実践例

上記の教材開発に基づいた実践例について述べよう．

1. **実施年月日** 1991年2月8日
2. **実施学年** 2年生1クラス(42名)
(旧課程 代数幾何の授業で実施)
3. **所要時間** 30分(術語の説明5分含む)
4. **実施問題内容と正答数等**

教材開発調査問題

問題 図6のグラフGについて，次の各問いに答えよ．

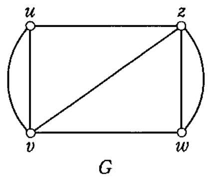

図6

(1) 図形Gの(隣接)行列Aを求めよ．

(2) 点u，v，w，zから出ている次数を求めよ．

(3) A^2を求めよ．

(4) 長さ2の異なるu-u歩道，u-v歩道の個数をそれぞれ求めよ．また，長さ2の異なるu-w歩道，u-z歩道の個数も求めよ．

(5) (3)の成分と(4)の結果を比較して，両者の間の関係を予想せよ．

(6) 上記の予想を利用して，長さ2の歩道の総数を求めよ．

アンケート：上記の問題の感想について答えて下さい．

1．おもしろい．
2．つまらない．
3．どちらともいえない．
4．問題が難しくてわからなかった．

正答数・誤答数

問題	正　答　数	誤　答　数	無　答　数
(1)	42 (100%)	0	0
(2)	41 (97.6%)	0	1 (2.4%)
(3)	36 (85.7%)	6 (14.3%)	0
(4)	40 (95.2%)	2 (4.8%)	0
(5)	29 (69.0%)	2 (4.8%)	11 (26.2%)
(6)	25 (59.5%)	9 (21.4%)	8 (19.0%)

アンケートの集計

1．18人 (49.9%)　　3．14人 (33.3%)
2．4人 (9.5%)　　4．6人 (14.3%)

＊(5)で次のようなコメントをつけてくれた生徒がいた．原文のまま紹介する．

> 行列 A^2 のよこの数字にあらわれる (たてでも同じ)
>
> 時間があまったのでついでに．
> A^n で長さ n の異なるそれぞれの歩道の個数がわかってしまう．
> 長さ n の歩道の総数もわかってしまう．便利ですねー．

なお，図6において u，w の代わりに自宅，学校等と具体的な名前をつけるとより興味を引くことができるかもしれない．

§4. おわりに

上記の問題は (高校での) 既知の定理や公式を適用して機械的に解ける問題でなく「実験・観測→規則性や法則の予想→予想の定式化→問題解決への応用→解決」という過程を経ないと解決できない．

このことは自ら新しい理論を作るという創造的思考活動を体験することにもなろう．そのようなことは，これからの数学教育が目指すべき重要な柱の1つである．

参考文献

1. 浜田隆資・秋山　仁共著，グラフ論要説　槙書店　1982年，pp. 9-10.
2. 竹中淑子著，線形代数的グラフ理論　培風館　1989年，pp. 45-46.

(茨城県立藤代高等学校)