隣接3項間漸化式の図形的性質について

神　正剛

[1]　準備(考察対象の制限)

$a_1=a,\ a_2=b,\ a_{n+2}=ra_{n+1}+sa_n$　…… ①

(ただし $rs\neq 0$)なる隣接3項間漸化式において文献〔1〕,〔2〕のように数列 $\{a_n\}$ を無限次元ベクトル

$$\vec{x}=(a_1,\ a_2,\ a_3,\ \cdots\cdots)$$

として捉え,

$S\vec{x}=(a_2,\ a_3,\ a_4,\ \cdots\cdots)$ なるずらし変換 S を用いて $S(S\vec{x})=S^2\vec{x}$ と書くことにすれば,①は

$$S^2\vec{x}=rS\vec{x}+s\vec{x}\quad\cdots\cdots ②$$

と表すことができる.いま

$$\vec{x}=(1,\ t,\ t^2,\ t^3,\ \cdots\cdots)\quad (t:\text{実数})$$

が②を満たすとすると,

$$t^2\vec{x}=rt\vec{x}+s\vec{x}$$

$(t^2-rt-s)\vec{x}=\vec{0}$ より

$$t^2-rt-s=0\quad\cdots\cdots ③$$ となる.

以下において③が相異なる実数解をもつ ($r^2+4s>0\cdots(*)$)　場合について考察する.

それらをいま $\alpha,\ \beta(\alpha<\beta)$ とする.

このとき,解と係数の関係より

$\alpha+\beta=r,\ \alpha\beta=-s$ であり,②は次のように変形される.

$$S(S\vec{x}-\alpha\vec{x})=\beta(S\vec{x}-\alpha\vec{x})\quad\cdots\cdots ④$$

$$S(S\vec{x}-\beta\vec{x})=\alpha(S\vec{x}-\beta\vec{x})\quad\cdots\cdots ⑤$$

上記の条件下で①の解は2つの等比数列

$S\vec{x}-\alpha\vec{x}$ と $S\vec{x}-\beta\vec{x}$ の差から得られるのであった.

[2]　漸化式の視覚的解釈

3項間漸化式②から④,⑤への変形は視覚的にどのような事をしているのかそのイメージを考えたい.

②においてベクトル $S^2\vec{x}$ は $S\vec{x}$ と $\vec{x}$ の1次結合である.ここで,$S\vec{x}$ と $\vec{x}$ が1次独立の場合を考えているので $S\vec{x}$ と $\vec{x}$ の張る平面内で平面ベクトルのように表して考えることにする.そうすると②から④,⑤への変形は例えば $0<\alpha<1<\beta$ とすると,

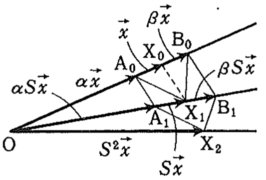


図1

上図で説明できる.

すなわち,$\vec{x}=\overrightarrow{OX_0}$,$S\vec{x}=\overrightarrow{OX_1}$ $S^2\vec{x}=\overrightarrow{OX_2}$,$\alpha\vec{x}=\overrightarrow{OA_0}$ $\alpha S\vec{x}=\overrightarrow{OA_1}$ $\beta\vec{x}=\overrightarrow{OB_0}$,$\beta S\vec{x}=\overrightarrow{OB_1}$

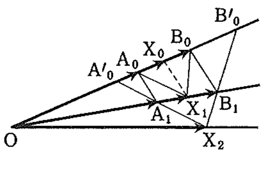
とおくと④,⑤はそれぞれ,

$\overrightarrow{A_1X_2}=\beta\overrightarrow{A_0X_1}$,$\overrightarrow{B_1X_2}=\alpha\overrightarrow{B_0X_1}$ を意味し,また $\overrightarrow{A_0A_1}=\alpha\overrightarrow{X_0X_1}$,$\overrightarrow{B_0B_1}=\beta\overrightarrow{X_0X_1}$ である.

つまり特性解が $0<\alpha<1<\beta$ なる α,β であるような漸化式②に対して図1のような3組の対辺が平行な平面図形 $A_0X_1B_0B_1X_2A_1$ を対応させることができた.逆に,点Oで交わるような3直線に対して適当な6点が存在して,図1のような平面図形 $A_0X_1B_0B_1X_2A_1$ が描けるならば次のことが成立する.すなわち,

> (命題1)　図1において
> $\overrightarrow{OA_0}=\alpha\overrightarrow{OX_0}$,$\overrightarrow{OB_0}=\beta\overrightarrow{OX_0}(0<\alpha<1<\beta)$
> $\overrightarrow{A_0A_1}\,/\!/\,\overrightarrow{B_0B_1}$,$\overrightarrow{A_0X_1}\,/\!/\,\overrightarrow{A_1X_2}$,$\overrightarrow{B_0X_1}\,/\!/\,\overrightarrow{B_1X_2}$ ならば $\overrightarrow{A_1X_2}=\beta\overrightarrow{A_0X_1}$,$\overrightarrow{B_1X_2}=\alpha\overrightarrow{B_0X_1}$ である.

(証)　下図において補助線 $A_1A'_0$,$B_1B'_0$ を引く.



条件より $\triangle X_1A_0B_0\backsim\triangle X_2A'_0B'_0$

ここで $A_0B_0:A'_0B'_0=(\beta-\alpha):(\beta^2-\alpha^2)$

$=1:(\alpha+\beta)$

$\therefore$　$A_0X_1:A'_0X_2=B_0X_1:B'_0X_2=1:(\alpha+\beta)$

$A_0X_1:A'_0A_1=1:\alpha$ より $A_0X_1:A_1X_2=1:\beta$

$B_0X_1 : B'_0B_1 = 1 : \beta$ より $B_0X_1 : B_1X_2 = 1 : \alpha$

よって，結論が成立する．　　　　　　　　（終）

したがって，この図形に対し特性解が $0<\alpha<1<\beta$ なる α，β であるような漸化式②を対応させることができることがわかった．

では前の(＊)の条件のもとで，他の漸化式②に対しどのような図示ができるかというと②における r，s についての場合分けによって描くことができる．要は，$r^2+4s>0$ のもとで次のように rs 平面上の領域で場合分けをすればよい．

ただし，下図において r 軸，s 軸上の点と曲線 $r^2+4s=0$ 上の点は除く（本稿における考察対象の制限による）．

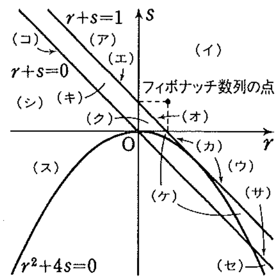


図２

図２の各領域上の点 $(r,\ s)$ に対して，$r=\alpha+\beta$，$s=-\alpha\beta$ により α，β の不等式へ翻訳される．他も同様であるから例えば

(ア)の場合　$1<r+s$，$r<0$，$s>0$

により　$\alpha+\beta-\alpha\beta>1$

$\alpha+\beta<0$，$\alpha\beta<0$

となり（約束 $\alpha<\beta$ に注意して）まとめると $\alpha<-\beta<-1$ となり３組の対辺

平行な図形が $\overrightarrow{Sx}$ と $\vec{x}$ を基本ベクトルとする直交 rs 平面上に描ける．

図１の図形は上記の rs 平面におきかえれば，**(ウ)の場合**，つまり $1<r+s$　$r>0$，$s<0$ の場合に相当する．また，その他の場合において辺が重なってしまう図形もある．これらの事から注意すべきは(＊)の漸化式②を上のような rs 平面上に図形として表すときに，ベクトル $S^2\vec{x}$ の点の位置を $r^2+4s\leqq 0$ の領域にとると，いくら努力しても描くことはできないということである．

[３]　漸化式に対応する図形の一性質について

(＊)の漸化式②に対応する対辺３組平行図形（辺が重なった場合も対辺と考えることにする）に対して次のような性質が成立する．

（命題２）　図１で辺の長さの積の比について

$$\frac{A_1A_0\cdot A_0X_1\cdot X_1B_0\cdot B_0B_1}{A_1X_2\cdot X_2B_1}=X_0X_1{}^2$$

が成り立つ．

（証）　$X_0X_1=k$，$A_0X_1=p$，$B_0X_1=q$ とおくと

$$(\text{左辺})=\frac{k\alpha\cdot p\cdot q\cdot k\beta}{p\beta\cdot q\alpha}=k^2 \qquad (\text{終})$$

この性質によって例えば図１の図形を上記の rs 平面（$\overrightarrow{Sx}$ が r 軸，$\vec{x}$ が s 軸の基本ベクトル）に描いた場合，２点 $\overrightarrow{Sx}$，$\vec{x}$ の距離は $\sqrt{2}$ であるから命題２の比の値は２である．

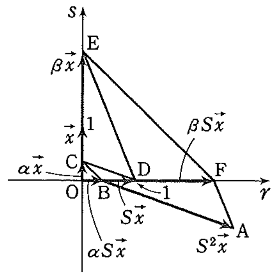


図３

図３において

$$\frac{BC\cdot CD\cdot DE\cdot EF}{BA\cdot AF}=2 \text{ である．}$$

その他の場合も同様である．つまり，(＊)の漸化式②全てに対し，それに対応する全ての rs 平面上の対辺３組平行図形（すなわち(ア)～(セ)にある点 $S^2\vec{x}$ ごとに図３のように描かれる図形）において命題２の比の値は全て一定であり２である．

[４]　おわりに

本稿において，ある制限下ではあるが隣接３項間漸化式を解く技術である等比数列化の考え方のイメージを視覚的に考察してみた．rs 平面に(ア)～(セ)の場合の適当な具体的数値で作図し，命題２の辺の積比の値を実際に計算することにより一定値を確認すれば漸化式に対する新たな認識をもつことができるのではないかと思われる．

（参考文献）いずれも数研出版刊

〔１〕「チャート受験数学・テーマ３」$p.60$

〔２〕「数研通信 No.27」$p.8$

（青森県青森明の星高等学校）