指導法研究

三角関数の合成公式

塩見（しおみ）　浩三（こうぞう）

98年のセンター試験の数学II，数学II・数学Bの第1問の共通必答問題の〔2〕に三角関数の合成公式を用いる次のような問題が出題された．

〔2〕 $0° \leqq \theta \leqq 90°$ の範囲で，関数

$f(\theta)=\sqrt{6}\cos\theta+\sqrt{2}\sin\theta$

$g(\theta)=\sqrt{2}\cos\theta-\sqrt{6}\sin\theta$ 　を考える．

(1) $f(60°)=\sqrt{\boxed{セ}}$ である．

(2) $\theta=\boxed{ソタ}°$ のとき，$f(\theta)$ は最小値 $\sqrt{\boxed{チ}}$ をとる．

(3) $g(\theta)=\boxed{ツ}\sqrt{\boxed{テ}}\cos(\theta+\boxed{トナ}°)$ と表せる．とくに，$g(\theta)=-\dfrac{8\sqrt{2}}{5}$ ならば，

$f(\theta)=\dfrac{\boxed{ニ}\sqrt{\boxed{ヌ}}}{\boxed{ネ}}$,

$\sin\theta=\dfrac{\boxed{ノ}+\boxed{ハ}\sqrt{\boxed{ヒ}}}{10}$ となる．

〔解答〕 (配点) 17点満点

(1) $f(60°)=\sqrt{6}\cos 60°+\sqrt{2}\sin 60°$

$=\sqrt{6}\cdot\dfrac{1}{2}+\sqrt{2}\cdot\dfrac{\sqrt{3}}{2}=\sqrt{6}$ 　(**2点**)

(2) $f(\theta)=\sqrt{6}\cos\theta+\sqrt{2}\sin\theta$

$=\sqrt{2}\sin\theta+\sqrt{6}\cos\theta$ 　$\left(\begin{array}{c}\tan\alpha=\dfrac{\sqrt{6}}{\sqrt{2}}=\sqrt{3}\\ \alpha=60°\end{array}\right)$

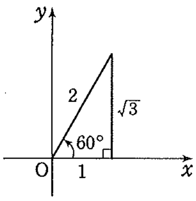
$=2\sqrt{2}\sin(\theta+60°)$

$0° \leqq \theta \leqq 90°$ より　$60° \leqq \theta+60° \leqq 150°$

$\theta+60°=150°$ すなわち $\theta=90°$ (**2点**) のとき，

$f(\theta)$ は最小値 $2\sqrt{2}\sin 150°=\sqrt{2}$ (**2点**) をとる．

(3) $g(\theta)$



$=\sqrt{2}\cos\theta-\sqrt{6}\sin\theta$

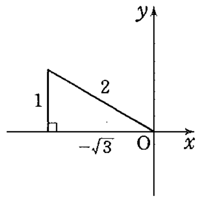
$=\sqrt{8}\left(\dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{8}}\cos\theta-\dfrac{\sqrt{6}}{\sqrt{8}}\sin\theta\right)$

$=2\sqrt{2}\left\{\cos\theta\left(\dfrac{1}{2}\right)-\sin\theta\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)\right\}$

$=2\sqrt{2}(\cos\theta\cos 60°-\sin\theta\sin 60°)$

$=2\sqrt{2}\cos(\theta+60°)$ (**3点**)　と表される．

(別解) $g(\theta)=2\sqrt{2}\left\{\left(-\dfrac{\sqrt{6}}{2\sqrt{2}}\right)\sin\theta+\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2\sqrt{2}}\right)\cos\theta\right\}$



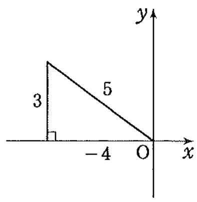
$=2\sqrt{2}\left\{\sin\theta\left(-\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)+\cos\theta\left(\dfrac{1}{2}\right)\right\}$

$=2\sqrt{2}\sin(\theta+150°)$

$=2\sqrt{2}\sin(90°+\theta+60°)$

$=2\sqrt{2}\cos(\theta+60°)$ (**3点**)

$g(\theta)=2\sqrt{2}\cos(\theta+60°)$



$=-\dfrac{8\sqrt{2}}{5}$ より

$\cos(\theta+60°)=-\dfrac{4}{5}$

よって　$\sin(\theta+60°)=\dfrac{3}{5}$

(2)より　$f(\theta)=2\sqrt{2}\cdot\dfrac{3}{5}=\dfrac{6}{5}\sqrt{2}$ 　(**4点**)

$f(\theta)=\sqrt{6}\cos\theta+\sqrt{2}\sin\theta=\dfrac{6}{5}\sqrt{2}$ 　…… ①

$g(\theta)=\sqrt{2}\cos\theta-\sqrt{6}\sin\theta=-\dfrac{8\sqrt{2}}{5}$ 　…… ②

①$\times\sqrt{2}$－②$\times\sqrt{6}$ より　$8\sin\theta=\dfrac{12}{5}+\dfrac{16\sqrt{3}}{5}$

よって　$\sin\theta=\dfrac{3+4\sqrt{3}}{10}$ 　(**4点**)

(3)番のコサインへの合成ができず，あせった受験生が多かったことと思われる．配点も昨年とは異なり難易に応じた配点となっていることと，約10分以内でこの問題を解かねばならないこと，第1問の〔2〕ということから考えても不適切な出題ではなかろうか．この問題の得点は17点満点中平均6～7点と考えられる．

他の問題にも数IIBの平均点が41点前後になった要因はあるが，この問題がいちばんの要因となっ

たことはまちがいなかろう．その理由を以下研究してみよう．

10数年前までは，いきなり

$a\sin\theta+b\cos\theta$

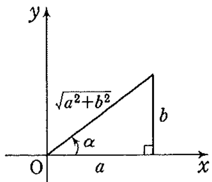
$=\sqrt{a^2+b^2}\left(\sin\theta\dfrac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}+\cos\theta\dfrac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}\right)$

$=\sqrt{a^2+b^2}(\sin\theta\cos\alpha+\cos\theta\sin\alpha)$

$=\sqrt{a^2+b^2}\sin(\theta+\alpha)$

ただし

$$\begin{cases}\cos\alpha=\dfrac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}\\ \sin\alpha=\dfrac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}\end{cases}$$



$\sqrt{a^2+b^2}$ でくくるかわりに $\sqrt{a^2+b^2}$ で割ることを記憶させ，2～3題は必ずこの方法で練習させ，**サインの加法定理の応用に主眼をおいた指導をし，**その後，図より α が求められればよいことに気づかせ，公式として定着をはかる順序で指導していた．

したがってコサインへの合成の練習問題も1題はあったように思う．

ところが新課程のほとんどの教科書は，次のようになっている．

座標が $(a,\ b)$ である点をPとし，$\mathrm{OP}=r$，動径OPの表す角を α とすると，

$a=r\cos\alpha,\ \ b=r\sin\alpha$ である．

$a\sin\theta+b\cos\theta$

$=r\cos\alpha\sin\theta$

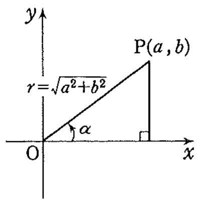
$\quad+r\sin\alpha\cos\theta$

$=r(\sin\theta\cos\alpha$

$\quad+\cos\theta\sin\alpha)$

$=r\sin(\theta+\alpha)$

ここで $r=\sqrt{a^2+b^2}$



三角関数の合成

$$\boldsymbol{a\sin\theta+b\cos\theta=\sqrt{a^2+b^2}\sin(\theta+\alpha)}$$

ただし $\cos\alpha=\dfrac{a}{\sqrt{a^2+b^2}},\ \sin\alpha=\dfrac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}$

次はサインの合成公式への代入練習，公式を利用しての三角方程式・不等式，最大・最小問題を解くことになる．

数研の教科書新編　数学IIの教授資料には，

［解　説］ **❶ 三角関数の合成**

◦いきなり公式の証明に入らず，次のような導入から入ってもよい．

$\sin(\theta+30^\circ)$ を加法定理を用いて展開すると

$\sin(\theta+30^\circ)=\sin\theta\cos30^\circ+\cos\theta\sin30^\circ$

$=\sin\theta\cdot\dfrac{\sqrt{3}}{2}+\cos\theta\cdot\dfrac{1}{2}$

$=\dfrac{1}{2}(\sqrt{3}\sin\theta+\cos\theta)$

となるが，逆に $\sqrt{3}\sin\theta+\cos\theta$ が与えられたとき，これを $2\sin(\theta+30^\circ)$ の形に変形するにはどうすればよいだろうか．

◦三角関数の加法定理の左辺と右辺を取り替えたものになっている．したがって，合成したもの**を加法定理で再度展開してもとの式に戻ることを確かめさせる．**

◦$\cos\alpha=\dfrac{a}{r},\ \sin\alpha=\dfrac{b}{r}$ となる α は，例えば

$0^\circ\leqq\alpha<360^\circ$ や $-180^\circ<\alpha\leqq180^\circ$ とすると，α はただ1つに定まる．教科書では，明記していないが，絶対値が最小の角として

$-180^\circ<\alpha\leqq180^\circ$ としてある．一般には，α はいろいろとれるから，合成の表し方は1つでないことを注意する．また，α の値が求められる $a,\ b$ の組合せは，そう多くはない．

$(1,\ \pm\sqrt{3})$，$(1,\ \pm1)$ などの組合せである．

◦なお，$a\sin\theta+b\cos\theta$ の最大値は $\sqrt{a^2+b^2}$，最小値は $-\sqrt{a^2+b^2}$ であるが，これを与える θ の値は求めにくいことがある．

◦**余弦の加法定理を用いて，**

$a\sin\theta+b\cos\theta=r\cos(\theta-\alpha)$，$r=\sqrt{a^2+b^2}$，

$a=r\sin\alpha$，$b=r\cos\alpha$ とすることもできるが，ほとんど使われていない．

ベテランの先生方も教授資料を隅々まで読んでおく必要があることを痛感する．

これまでの指導経験からも，三角関数の合成の公式は，生徒に理解させることが困難な分野の1つであった．その原因は，ただし $\cos\alpha=\dfrac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}$，

$\sin\alpha=\dfrac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}$ はなんとなく繁雑なことである．

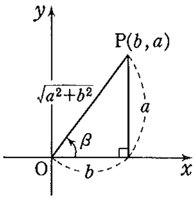
座標で直角三角形を描き，図より理解させることが大切である．

また，α が1通りでないことも公式を難しくしている．α の値が求められる $a,\ b$ の組合せは，そう多くないことをしっかりと理解させておくことも大切である．

コサインの合成公式では点Pの座標を$(b,\ a)$とすることをおさえて，サインの公式と同じように，

$$a\sin\theta+b\cos\theta$$
$$=\sqrt{a^2+b^2}\left(\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}\sin\theta+\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}\cos\theta\right)$$
$$=\sqrt{a^2+b^2}(\cos\theta\cos\beta+\sin\theta\sin\beta)$$
$$=\sqrt{a^2+b^2}\cos(\theta-\beta)$$

（コサインの加法定理の応用）

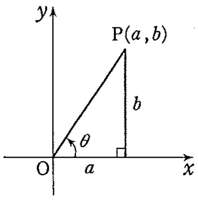


以上より

コサインの合成公式

$$\boldsymbol{a\sin\theta+b\cos\theta=\sqrt{a^2+b^2}\cos(\theta-\beta)}$$
$$\left(\text{ただし}\ \cos\beta=\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}},\ \sin\beta=\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}\right)$$

ここまで授業で指導されていないのが現状と思われる．$\sqrt{a^2+b^2}$ でくくる発想の類似問題は行列の図形の１次変換でも用いられる．



１次変換の分解

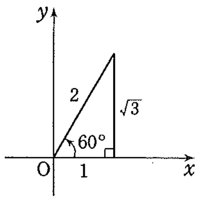
〈回転と拡大(縮小)〉である．

$$\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$$
$$=\sqrt{a^2+b^2}\begin{pmatrix} \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}} & -\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}} \\ \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}} & \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}} \end{pmatrix}$$
$$=\begin{pmatrix} \sqrt{a^2+b^2} & 0 \\ 0 & \sqrt{a^2+b^2} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$$

〈$\sqrt{a^2+b^2}$ 倍に拡大〉〈原点Oの回りにθだけ回転〉

（例）$\begin{pmatrix} 1 & -\sqrt{3} \\ \sqrt{3} & 1 \end{pmatrix}$

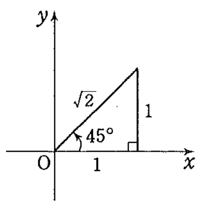
$$=2\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$
$$=2\begin{pmatrix} \cos 60° & -\sin 60° \\ \sin 60° & \cos 60° \end{pmatrix}$$



原点Oの回りに60°だけ回転し，更にOを中心に２倍する．

（例）

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$
$$=\sqrt{2}\begin{pmatrix} \cos 45° & -\sin 45° \\ \sin 45° & \cos 45° \end{pmatrix}$$



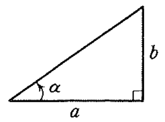
サインへの合成の公式は，小生が高校生の時には次のように習った．

$a>0$，$b>0$ として

$$\boldsymbol{a\sin\theta\pm b\cos\theta}$$
$$\boldsymbol{=\sqrt{a^2+b^2}\sin(\theta\pm\alpha)}$$

ただし，$\tan\alpha=\dfrac{b}{a}$

（α は鋭角）



$a<0$ のときは，－でくくって考える．この公式だと，$\tan\alpha=\dfrac{b}{a}$ と直角三角形がイメージし易くαが１つに決定されるので記憶が楽である．この方法で指導して特に問題はなかった．

次に合成公式でαが求められないときの最大・最小の問題の処理は数学的におもしろいので最後の仕上げとしてよく取り上げられる．

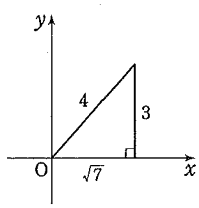
> $0°\leqq\theta\leqq 90°$ のとき，$k=\sqrt{7}\sin\theta+3\cos\theta$ の最大値と最小値を求めよ．

（解）$k=\sqrt{7}\sin\theta+3\cos\theta$

$=4\sin(\theta+\alpha)$

$\tan\alpha=\dfrac{3}{\sqrt{7}}$

$1<\dfrac{3}{\sqrt{7}}<\sqrt{3}$



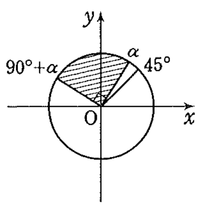
$\tan 45°<\tan\alpha<\tan 60°$

$45°<\alpha<60°$

$0°\leqq\theta\leqq 90°$ より

$\alpha\leqq\theta+\alpha\leqq 90°+\alpha$

$\tan\alpha=\dfrac{3}{\sqrt{7}}$ より



$\sin\alpha=\dfrac{3}{4}$，$\cos\alpha=\dfrac{\sqrt{7}}{4}$

$4\sin(90°+\alpha)=4\cos\alpha=\sqrt{7}$　$(4\sin\alpha=3)$

$x+\alpha$	α	……	90°	……	$90°+\alpha$
k	3	↗	4	↘	$\sqrt{7}$

よって，最大値４，最小値 $\sqrt{7}$

なお，$0°\leqq\theta\leqq 360°$ ならば，αの値が求められなくても常に最大値は $\sqrt{a^2+b^2}$，最小値は $-\sqrt{a^2+b^2}$ である．

（愛媛県立今治北高等学校）