f と f^{-1} のグラフの共有点の個数について

石濱(いしはま)　文武(ふみたけ)

§1. はじめに

無理関数 $y=\sqrt{-3x+7}$ と

その逆関数 $y=-\dfrac{1}{3}x^2+\dfrac{7}{3}$ $(x\geqq 0)$

のグラフは計算によれば3点で交わるが，その状態が描きにくく，この結果自体が意外である．

一般に，

無理関数 $y=f(x)=\sqrt{ax+b}$

のグラフと，その逆関数である

2次関数 $y=f^{-1}(x)=\dfrac{1}{a}x^2-\dfrac{b}{a}$ $(x\geqq 0)$

のグラフが3点で交わるための条件は課題として残したい(数研通信 No.22，鈴木道夫氏，無理関数と2次関数の交点について)．

大略，上記のような記事がありましたが，本稿では，この問題を検討し，解決したいと思います．

§2. 検討

問題を無理関数に限定しない方が全体像が見易くなります．問題を次のように定式化します．

> **問題**：a, b を定数として，$a\neq 0$ とする．
> xy 座標平面上で，2つの方程式
> $y=ax^2+b$ …… ①
> $x=ay^2+b$ …… ②
> について，①と②のグラフの共有点の個数を分類せよ．

すぐに1変数を消去しようとすると，4次方程式になるので，消去せず，①，②を x, y についての連立方程式とみます．

①−② より

$$y-x=a(x^2-y^2)$$

したがって　$y=x$ …… ③

または　$x+y=-\dfrac{1}{a}$ …… ④

となります．

すなわち，①，②の共有点があるとすれば，それは

直線　$y=x$

または

直線　$x+y=-\dfrac{1}{a}$

上にあることになります．前者は

①と②のグラフが直線 $y=x$ に関して対称であることから当然のことです．

(1)　$y=x$ …… ③ のとき

y を消去すれば，①，②はともに，

2次方程式　$ax^2-x+b=0$

となります．

この2次方程式の判別式を D_1 とおけば，

$$D_1=1-4ab$$

です．

しだがって，①と②のグラフは

$ab<\dfrac{1}{4}$　のとき　2個

$ab=\dfrac{1}{4}$　のとき　1個

$ab>\dfrac{1}{4}$　のとき　0個

の共有点を，直線 $y=x$ 上にもつことになります．

(2)　$x+y=-\dfrac{1}{a}$ …… ④ のとき

④と①より，y を消去すれば

2次方程式　$ax^2+x+\dfrac{1}{a}+b=0$ …… ⑤

となります．

この2次方程式の判別式を D_2 とおけば，

$$D_2=-3-4ab$$

です．

もし，方程式⑤が実数解 α, β をもてば

$$a\alpha^2+\alpha+\frac{1}{a}+b=0$$

$$\alpha+\beta=-\frac{1}{a} \cdots\cdots ⑥$$

が成立します．この2式より

$$\beta=-\alpha-\frac{1}{a}=a\alpha^2+b \cdots\cdots ⑦$$

同様にして

$$\alpha=a\beta^2+b \cdots\cdots ⑧$$

を得ます．

⑥, ⑦より　点 $N_1(\alpha, \beta)$ が，①と④のグラフの共有点になり

⑥, ⑧より　点 $N_2(\beta, \alpha)$ も，①と④のグラフの共有点になることがわかります．

更に，N_1 と N_2 は直線 $y=x$ に関して対称ですから，

N_1 が①のグラフ上にあれば N_2 は②上にあり

N_2 が①のグラフ上にあれば N_1 は②上にある

ことがわかります．

結局，直線 $y=x$ に関して対称な点

$$N_1(\alpha, \beta),\ N_2(\beta, \alpha)$$

が，3つのグラフ①，②，④の共有点になることがわかります．

また，逆に，

②と④のグラフの共有点は①, ②, ④のグラフの共有点

になります．

以上のことから，①, ②のグラフは

$ab<-\frac{3}{4}$　のとき　2個

$ab=-\frac{3}{4}$　のとき　1個

$ab>-\frac{3}{4}$　のとき　0個

の共有点を

$$直線\quad x+y=-\frac{1}{a}$$

上にもつことになります．

(3)　$y=x \cdots\cdots ③$

かつ　$x+y=-\frac{1}{a} \cdots\cdots ④$ のとき

ここでは，(1)と(2)の重複をチェックします．

③, ④より　$x=y=-\frac{1}{2a}$

これを①に代入して　$ab=-\frac{3}{4}$

すなわち，重複がおきるのはこのときだけです．

§3. 結果

§2の結果をまとめると，次のようになります．

> xy 座標平面上で，2つの方程式
>
> $$y=ax^2+b,\ x=ay^2+b$$
>
> の表すグラフの位置関係は次のようになる．
>
> (1)　$ab>\frac{1}{4}$　のとき　共有点はない
>
> (2)　$ab=\frac{1}{4}$　のとき　1点で接する
>
> (3)　$-\frac{3}{4}<ab<\frac{1}{4}$　のとき　2点で交わる
>
> (4)　$ab=-\frac{3}{4}$　のとき　1点で交わり
1点で接する
>
> (5)　$ab<-\frac{3}{4}$　のとき　4点で交わる

§4. おわりに

§1で触れた「図が描きにくい場合」とは

交点の付近で2曲線の凹凸が一致している

交点が近接している

ときであると思われます．

図(5)-1がその場合です．

図で，点 N_1 と N_2 が近づくのは ab の値が $-\frac{3}{4}$ に近いときです．§1の例

$$y=-\frac{1}{3}x^2+\frac{7}{3}$$

では，$ab=-\frac{7}{9}$ ですから，$-\frac{3}{4}$ との差は $\frac{1}{36}$ です．

また，図を(5)-3, -2, -1の順に観察すると，(5)-1図の‘意外性’は解消するのではないでしょうか．図(5)-1だけを単独に，しかも第1象限だけを手で描くのはかなり困難です．

まさに

曲線の微小部分は直線に近い

のです．

更に，曲線の曲がり具合(曲率)に着目すると一層はっきりします．

図(5)-2で，N_1 を頂点とする放物線は曲率の絶対値が N_1 で最大になり，N_2 に向かって単調に減少していき，N_2 を頂点とする放物線の曲率の絶対値は逆に N_1 に向かって単調に減少していきます．

直線 $y=x$ に関して対称な2つの放物線の相対的な位置関係を動的に図1から図5まで観察する

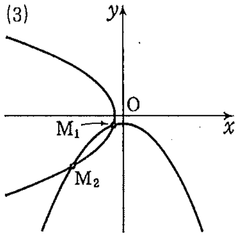
と，明瞭な理解が得られると思います．

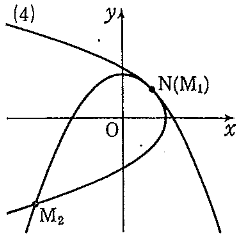
また，コンピュータで2曲線をおのおの別の色をつけて描くと，交点の様子が大変わかりやすく，コンピュータの効用が実感できます．

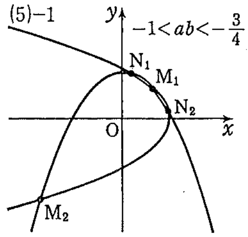
最後に，生徒向けの例をあげておきます．

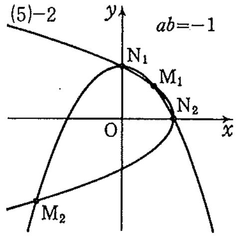
> nを2以上の正整数とするとき，2つの放物線
> $$x^2=-(n+1)y+n^2+n+1$$
> $$y^2=-(n+1)x+n^2+n+1$$
> は，4点で交わり，その内の2点は
> 格子点　$(n,\ 1)$，$(1,\ n)$
> である．

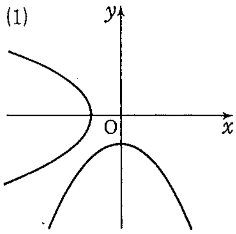
（神奈川県立湘南高等学校）

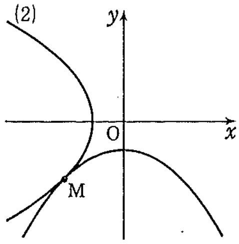
(3)


(4)


(5)−1


(5)−2


(1)


(2)


(5)−3