円すいの体積計算について

遠藤 一成，青山 行雄

1 はじめに

円すいの体積を，積分を用いた体積公式

$$V=\int_a^b S(x)dx \qquad S(x)\text{は断面積}$$

により，3通りの方法で計算することが本稿の目的である．この3通りというのは，円すいの平面による切り口が3種類の円すい曲線，つまり

(1) 底面に平行な平面で切れば切り口は円

(2) 側面の母線に平行な平面で切れば放物線

(3) 底面に垂直な平面で切れば双曲線

となることに対応している．

以下，空間内で

$$x^2+y^2\leqq(1-z)^2 \qquad (0\leqq z\leqq 1)$$

で表される円すいKを考える．円すいKは頂点$(0,\ 0,\ 1)$，底面が円板 $x^2+y^2\leqq 1$ なので，体積は$\dfrac{\pi}{3}$である．

2 底面に平行な平面で切るとき

円すいKを，$z=k$ という平面で切った切り口は，半径$(1-k)$の円になるので切り口の面積は

$$S(k)=\pi(1-k)^2$$

である．よって，円すいKの体積Vは

$$V=\int_0^1\pi(1-k)^2dk=\frac{\pi}{3}$$

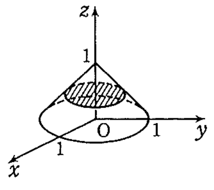

図1

3 側面の母線に平行な平面で切るとき

円すい K の側面の方程式は

$$\begin{cases}x^2+y^2=(1-z)^2 & \cdots\cdots ① \\ 0\leqq z\leqq 1\end{cases}$$

で与えられる．

また，母線に平行な平面 α の方程式を

$$z=y+k \qquad \cdots\cdots ②$$

とする．ここで $-1\leqq k\leqq 1$ である．平面 α と円すいKの側面の交線を xy 平面に正射影した曲線の方程式は，①，②から z を消去して

$$x^2+y^2=\{1-(y+k)\}^2$$

つまり，放物線

$$2(1-k)y=(1-k)^2-x^2$$

である．

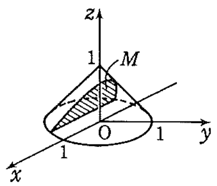

図2

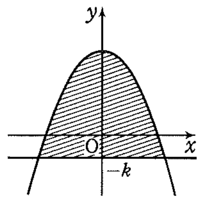

図3

よって，平面 α と円すいKによって切り取られる部分Mの xy 平面上への正射影は図3のようになるのでその面積 $S'(k)$ は

$$S'(k)=\int_{-\sqrt{1-k^2}}^{\sqrt{1-k^2}}\left\{\frac{(1-k)^2-x^2}{2(1-k)}-(-k)\right\}dx$$

$$=\frac{1}{2(1-k)}\times\frac{1}{6}\{\sqrt{1-k^2}-(-\sqrt{1-k^2})\}^3$$

$$=\frac{2(1+k)\sqrt{1-k^2}}{3}$$

したがって，切り口Mの面積 $S(k)$ は，図4より

$$S(k)=\sqrt{2}\,S'(k)$$

$$=\frac{2\sqrt{2}(1+k)\sqrt{1-k^2}}{3}$$

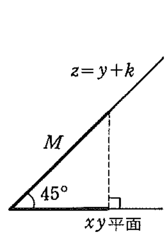

図4

以上より，円すいの体積Vは

$$V=\int_{-1}^1 S(k)\frac{dk}{\sqrt{2}}$$

$$=\int_{-1}^1\frac{2(1+k)\sqrt{1-k^2}}{3}dk$$

$$=\frac{4}{3}\int_0^1\sqrt{1-k^2}\,dk=\frac{\pi}{3}$$

④の準備として，次の補題を証明しておく．

補題 $\int\sqrt{x^2+k^2}dx$

$$=\frac{1}{2}x\sqrt{x^2+k^2}+\frac{k^2}{2}\{\log(x+\sqrt{x^2+k^2})-\log k\}+C$$

ただし，$k>0$ である．

証明 $x=\dfrac{k(e^t-e^{-t})}{2}$ …… ③

とおくと $\dfrac{dx}{dt}=\dfrac{k(e^t+e^{-t})}{2}$ である．

また，③より

$$e^t=\frac{x+\sqrt{x^2+k^2}}{k} \quad \cdots\cdots ④$$

$$t=\log(x+\sqrt{x^2+k^2})-\log k \quad \cdots\cdots ⑤$$

となる．そこで

$$\int\sqrt{x^2+k^2}dx$$

$$=\int\sqrt{\left\{\frac{k(e^t-e^{-t})}{2}\right\}^2+k^2}\times\frac{k(e^t+e^{-t})}{2}dt$$

$$=\frac{k^2}{4}\int(e^t+e^{-t})^2dt$$

$$=\frac{k^2}{4}\left(\frac{e^{2t}}{2}+2t-\frac{e^{-2t}}{2}\right)+C$$

$$=\frac{k^2}{8}(e^t+e^{-t})(e^t-e^{-t})+\frac{k^2t}{2}+C$$

④，⑤を代入

$$=\frac{1}{2}x\sqrt{x^2+k^2}+\frac{k^2}{2}\{\log(x+\sqrt{x^2+k^2})-\log k\}+C$$

④ 底面に垂直な平面で切るとき

円すいKの平面 $y=k$ による切り口は双曲線であり，その方程式は

$$x^2-(1-z)^2=-k^2$$

で与えられる．

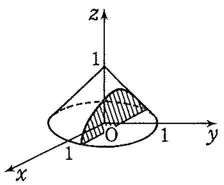

図5

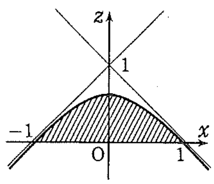

図6

図6より切り口の面積 $S(k)$ は

$$S(k)=2\int_0^{\sqrt{1-k^2}}(1-\sqrt{x^2+k^2})dx$$

補題より

$$=\Big[2x-x\sqrt{x^2+k^2}$$
$$-k^2\{\log(x+\sqrt{x^2+k^2})-\log k\}\Big]_0^{\sqrt{1-k^2}}$$

$$=\sqrt{1-k^2}-k^2\log(1+\sqrt{1-k^2})+k^2\log k$$

したがって，円すいKの体積Vは

$$V=2\int_0^1 S(k)dk$$

$$=2\int_0^1\{\sqrt{1-k^2}-k^2\log(1+\sqrt{1-k^2})+k^2\log k\}dk$$

$$=2\left\{\frac{\pi}{4}-\frac{3\pi-4}{36}+\left(-\frac{1}{9}\right)\right\}=\frac{\pi}{3}$$

なぜならば，第2項の定積分は部分積分法より

$$\int_0^1 k^2\log(1+\sqrt{1-k^2})dk$$

$$=\left[\frac{k^3}{3}\log(1+\sqrt{1-k^2})\right]_0^1$$

$$+\frac{1}{3}\int_0^1\frac{k^4}{\sqrt{1-k^2}(1+\sqrt{1-k^2})}dk$$

広義積分なので

$$=\lim_{\varepsilon'\to1-0}\frac{1}{3}\int_0^{\varepsilon'}\frac{k^4}{\sqrt{1-k^2}(1+\sqrt{1-k^2})}dk$$

$k=\sin\theta$ とおきかえると，$dk=\cos\theta\,d\theta$

$$=\lim_{\varepsilon\to\frac{\pi}{2}-0}\frac{1}{3}\int_0^{\varepsilon}\frac{\sin^4\theta}{\cos\theta(1+\cos\theta)}\times\cos\theta\,d\theta$$

$$=\frac{1}{3}\int_0^{\frac{\pi}{2}}(1+\cos\theta)(1-\cos\theta)^2d\theta$$

$$=\frac{1}{3}\int_0^{\frac{\pi}{2}}(\cos^3\theta-\cos^2\theta-\cos\theta+1)d\theta$$

$$=\frac{1}{3}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(\frac{\cos3\theta+3\cos\theta}{4}-\frac{1+\cos2\theta}{2}-\cos\theta+1\right)d\theta$$

$$=\frac{1}{3}\left[\frac{\sin3\theta}{12}-\frac{\sin2\theta}{4}-\frac{\sin\theta}{4}+\frac{\theta}{2}\right]_0^{\frac{\pi}{2}}$$

$$=\frac{3\pi-4}{36}$$

また，第3項の定積分も広義積分であることに注意して

$$\int_0^1 k^2\log k\,dk=\lim_{\varepsilon\to+0}\int_\varepsilon^1 k^2\log k\,dk$$

$$=\lim_{\varepsilon\to+0}\left\{\left[\frac{k^3}{3}\log k\right]_\varepsilon^1-\int_\varepsilon^1\frac{k^3}{3}\times\frac{1}{k}dk\right\}$$

$$=\lim_{\varepsilon\to+0}\left\{-\frac{\varepsilon^3\log\varepsilon}{3}-\left[\frac{k^3}{9}\right]_\varepsilon^1\right\}=-\frac{1}{9}$$

（愛知県滝高等学校）