Irisunaの定理と連鎖定理

(Menelaosの定理・Cevaの定理を含む)

入砂(いりすな)　七五三一(しめいち)

1. はじめに

数研通信19号ではIrisunaの定理がどんな定理か．また，数研通信22号では第2定理からの発展として，線束の定理を発表した．更に数研通信27号では，発展的な応用として第3定理，共線定理，共点定理を発表した．本稿ではIrisunaの定理を応用するときに重要となる連鎖定理を中心に発表します．

まずは，既に発表した定義とIrisunaの定理，第2定理を述べて準備とします．

2. 定義

点Pは図の三角形ABCの周および内部の線分上を動くものとする．

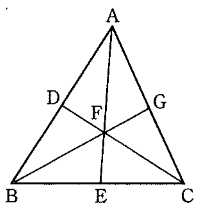
1）動点Pに対応する線分の比とは(平面)

$$\sigma(\mathrm{AB})=\frac{\mathrm{AD}}{\mathrm{DB}} \quad \cdots\cdots ①$$

$$\sigma(\mathrm{BA})=\frac{\mathrm{BD}}{\mathrm{DA}} \quad \cdots\cdots ②$$

$$\sigma(\mathrm{AD})=\frac{\mathrm{AB}}{\mathrm{BD}} \quad \cdots\cdots ③$$

$$\sigma(\mathrm{DA})=\frac{\mathrm{DB}}{\mathrm{BA}} \quad \cdots\cdots ④$$



のこととする．

他も同様に表すこととする．

2）返り点について

①，②のとき返り点0，③，④のとき返り点1であるという．

返り点0，1以外の動きは考えない．

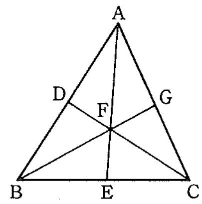
図で，点Fからは返り点1，その他の点からは返り点0または1の動きとなる．

3）$R_i^j=1$ は動点Pが返り点0または1で動いてもとの点に戻るとき，返り点1の総数が i 個で，j 個の比の積が1のこととする．

例えば，$R_2^3=1$ は返り点1が2個で3つの比の積が1であることを表す．

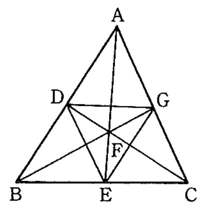
3. Irisunaの定理

【定理】三角形ABCの頂点A，B，Cと内部の点Fとを結ぶ直線が，対辺AB，BC，CAと交わる点をそれぞれD，E，Gとする．点Pは三角形ABCの周および内部の線分上を動くものとすると，点A，B，C，D，E，F，Gのどこから動いても再びもとの点に戻るならば，どんなときも動点Pに対応する線分の比の積は1である．



4. Irisunaの第2定理

【定理】Irisunaの定理で，動点Pが線分DG，GE，ED上は返り点0で動くものとすると，点A，B，C，D，E，F，Gのどこから動いても，再びもとの点に戻るならば，どんなときも動点Pに対応する線分の比の積は1である．

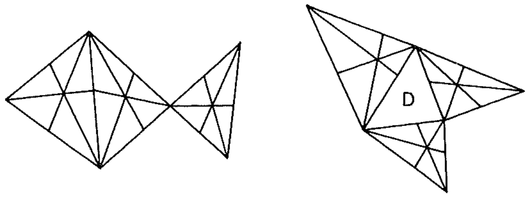


Irisunaの定理を拡張して次の定理を得た．

5. (Irisunaの)連鎖定理

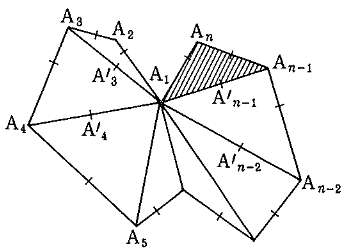
【定理】Irisunaの定理を表す三角形 △ が1辺(3点共有)または互いに頂点(1点共有)で連鎖する図形において，点Pは △ の周および内部

の線分上を動くものとすると，動点Pが再びもとの点に戻るならば，どんなときも動点Pに対応する線分の比の積は1である．ただし，内部に △ を含まない領域 Dがある場合は，このDの外周に対応する線分の比の積は1になるものとする．



【証明】（Ⅰ） 図形の内部が △ で覆われている場合 動点Pが △ の連鎖する図形の線分上を“返り点”0または1で動いて，もとの点に戻るときに描く閉じた図形は，すべて $R_3{}^3=1$ を表す小三角形によって分割されている．また，“n 角形の三角形分割は，常に方向づけ可能である” したがって，線分の消去，線分の分割の補題から，$R_3{}^3=1$ を表す向きをもった小三角形の連鎖によって描かれる．だから，動点Pによって描かれる図形に対応する線分の比の積は，$R_3{}^3=1$ を表す線分の比の積となる．よって，動点Pがもとに戻るときの線分の比の積は1である．

（Ⅱ） 図形の内部に △ を含まない領域 D がある場合 領域 D の外周の線分の比の積が1ならば，この領域 D は △ の連鎖で表されることを証明する．



領域 D を n 角形 $A_1A_2A_3\cdots\cdots A_n$ とする．多角形は三角形分割ができるので，外周に対応する線分の比の積が1だから，$\triangle A_1A_2A_3$ で線分 A_1A_3 上に点 A'_3 をとって $R_0{}^3=1$ となるようにする．同様に線分 A_4A_1, A_5A_1, …………, $A_{n-2}A_1$, $A_{n-1}A_1$ 上にそれぞれ点 A'_4, A'_5, ……, A'_{n-2}, A'_{n-1} をとって，順に $\triangle A_3A_4A_1$, $\triangle A_4A_5A_1$, ……, $\triangle A_{n-2}A_{n-1}A_1$ で $R_0{}^3=1$ とすることができる．また，n 角形の三角形分割は方向づけ可能だから，動点Pの動きが $A_1A_2\to A_2A_3\to A_3A_4\to\cdots\cdots\cdots\to A_{n-2}A_{n-1}$ は A_1A_{n-1} と等しくなる．領域 D の外周に対応する線分の比の積が1だから，動点Pの動き $A_1A_{n-1}\to A_{n-1}A_n\to A_nA_1$ に対応する線分の比は1である．

ゆえに $R_0{}^3=1$ が成り立ち，$\triangle A_{n-1}A_nA_1$ は Irisuna の定理を表す三角形 △ になり，領域 D が △ の連鎖で表される．

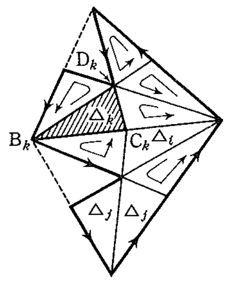
よって，（Ⅰ）より（Ⅱ）の場合も成り立つ．

（証明終）

次に σ 記号の定義による別証を述べる．

（Irisuna の）連鎖定理で，動点Pによる image（図形）の内部が △ で覆われている場合を証明する．つまり，このとき $\sigma(A_0A_1\cdots\cdots A_{n-1}A_0)=1$ を証明する．

【証明】 動点Pが返り点 0，1で動いてもとの点に戻るときにできる image（図形）が単純閉曲線とする．…… ①



この内部を分割している三角形 $\triangle_k=\triangle(B_kC_kD_k)$ $(1\leqq k\leqq F)$ とする．ここに $\triangle_k$ は $R_3{}^3=1$ を表す三角形である．…… ②

また，n 角形の三角形分割は常に方向づけ可能である．…… ③

だから，$\triangle_k$ の向きは多角形 $A_0A_1\cdots\cdots A_{n-1}A_0$ の向きと同じとする．したがって，

$\sigma(B_1C_1D_1B_1)\sigma(B_2C_2D_2B_2)\cdots\cdots\times\sigma(B_FC_FD_FB_F)$
$=[\sigma(B_1C_1)\sigma(C_1D_1)\sigma(D_1B_1)]$
$[\sigma(B_2C_2)\sigma(C_2D_2)\sigma(D_2B_2)]\cdots\cdots$
$[\sigma(B_FC_F)\sigma(C_FD_F)\sigma(D_FB_F)]\cdots$(T)

①で $\triangle_k$ は次の2つの場合がある．

（Ⅰ） 内部の $\triangle_i$ では3辺が隣接している．

（Ⅱ） 外周(①)を含む $\triangle_j$ では1辺または2辺が隣接している．

③から，$\triangle_k$が隣接している共通辺は，動点Pによる線分の消去の補題から消去される．だから内部の共通辺が消去され外周が残る．
よって，動点Pによる線分の分割の補題から
$(T)=\sigma(A_0A_1\cdots\cdots A_{n-1}A_0)$ となる．
また，②から $\sigma(B_kC_kD_kB_k)=1$ である．
したがって，$\sigma(A_0A_1\cdots\cdots A_{n-1}A_0)=1$ である．
動点Pによるimage(図形)が単純閉曲線でない閉曲線の場合は単純閉曲線に分割できるので成り立つ．

(証明終)

6. 応用

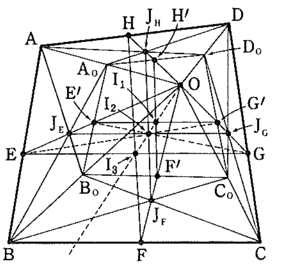
連鎖定理の考え方によって，次の問題を解こう．

問題1　(Irisunaの)連鎖定理の拡張を証明しよう．

> **【定理】** (Irisunaの)連鎖定理で，内部に を含まない領域Dがある場合は，Dの外周を内部または境界とする，ある1つの動点Pのimage(図形)に対応する，線分の比の積が1になるならば，連鎖定理が成り立つ．

問題2　四角形での(Irisunaの)共線定理，共点定理を証明しよう．

> **【定理】** 四角形ABCDの内部の点Oと頂点を結ぶ線分と辺AB, BC, CD, DAのそれぞれでできる三角形がIrisunaの第2定理を表す三角形 で連鎖するとき，それぞれの点を図のようにすると，直線H′F′とE′G′；J_HJ_FとJ_EJ_G；HFとEGのそれぞれの交点I_1, I_2, I_3と点Oは一直線上にあり，点I_2は直線E′G, G′Eの交点と一致する．



7. 今後の課題

Irisunaの定理とその発展，応用については数研通信に4回にわたって発表させて頂きました．特に，この連鎖定理により，Irisunaの定理は多面体から球面，曲面へと発展していきます．また，Irisunaの定理の証明方法は専門家からも助言を頂きましたように“発見的研究に使える”と思います．なお，教育の現場にいかに具現化し実践するのかは，今後の課題であります．

(愛知県立一宮興道高等学校)

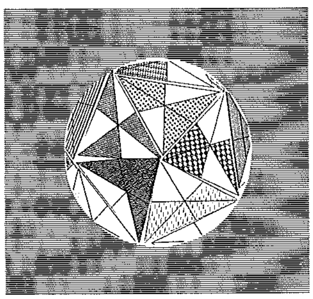
《参　考　文　献》

1) 岩田至康 編：幾何学大辞典，槇書店
2) 清宮俊雄 著：幾何学—発見的研究法—，科学新興社
3) 入砂七五三一：“メネラウス・チェバの定理の拡張について”，平成5年度県立学校教職員個人研究研究集録(愛知県教育委員会)(1994.3)
4) 入砂七五三一：“メネラウス・チェバの定理の拡張について”，数研通信19号，数研出版(1994.5)
5) 入砂七五三一：メネラウスの定理・チェバの定理を含む定理について—Irisunaの定理—，日数教学会誌第76巻臨時増刊，日数教三重大会提案資料(1994.8)
6) 入砂七五三一：Irisunaの定理(メネラウスの定理・チェバの定理を含む)，I.F.Report第22号，財団法人石田財団(1995.3)
7) 入砂七五三一：Irisunaの定理，数研通信22号，数研出版(1995.4)
8) 入砂七五三一：メネラウスの定理・チェバの定理を含む定理の発展について—Irisunaの定理—，日数教学会誌第77巻臨時増刊，日数教東京大会提案資料(1995.8)
9) 入砂七五三一：球面でのメネラウスの定理・チェバの定理を含む定理について—Irisunaの定理—，日数教学会誌第78巻臨時増刊，日数教長崎大会提案資料(1996.8)

《参　考　資　料》

> Irisunaのボール(しめちゃんのボール)はIrisunaの定理，第2定理を表す代表元20個のimageによって，デザインされている．また，連鎖定理の1つのモデルである．

★★★★★★★★★★★★★★★★★



しめちゃんのボール1993.11.発表
商標権，意匠権登録済

(ボールの図柄は実物をモデル化したものである)