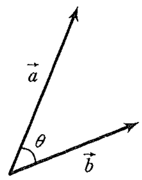
内積とは何か!?

——意欲的な生徒のために！——

宮川（みやかわ） 幸隆（ゆきたか）

§1. 内積の公理と大きさの公理

ベクトルの向きを量的に扱うとすれば，2つのベクトルのなす角 θ が問題となるが，θを直接扱う代わりに，$\cos\theta$，更には，2つのベクトル $\vec{a}$, $\vec{b}$ の内積



$\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}||\vec{b}|\cos\theta$　　が用いられる．

内積は，2つのベクトルの組$(\vec{a},\ \vec{b})$に1つの実数 $\vec{a}\cdot\vec{b}$ を対応させる対応の規則であると考えられる〔内積は実数(スカラー)であって，もはやベクトルではない!!〕．内積は次の3性質を満たす：

(IP1) (正値性)　$\vec{a}\cdot\vec{a}\geqq 0$
(等号成立は $\vec{a}=\vec{0}$ のときのみ)

(IP2) (対称性)　$\vec{a}\cdot\vec{b}=\vec{b}\cdot\vec{a}$

(IP3) (双線型性)　m, n を任意の実数とするとき，

$$\begin{cases}\vec{a}\cdot(m\vec{b}+n\vec{c})=m\vec{a}\cdot\vec{b}+n\vec{a}\cdot\vec{c}\\(m\vec{a}+n\vec{b})\cdot\vec{c}=m\vec{a}\cdot\vec{c}+n\vec{b}\cdot\vec{c}\end{cases}$$

この(IP1)～(IP3)は**内積の公理**と呼ばれる．
そして，これらの公理を満たす“対応の規則”を**内積**と呼ぶのである．

ベクトルの大きさは，1つのベクトル $\vec{a}$ に1つの実数 $|\vec{a}|$ を対応させる対応の規則であると考えられる．ベクトルの大きさは次の3性質をもつ：

(N1) (正値性)　$|\vec{a}|\geqq 0$
(等号成立は $\vec{a}=\vec{0}$ のときのみ)

(N2) (実数(スカラー)倍に対する‘同次’性)
m を任意の実数とするとき $|m\vec{a}|=|m||\vec{a}|$

(N3) (三角不等式)　$|\vec{a}+\vec{b}|\leqq|\vec{a}|+|\vec{b}|$

この(N1)～(N3)は**大きさの公理**と呼ばれる．そして，この公理を満たす“対応の規則”を**大きさ**と呼ぶ．

以下では，2つのベクトルの組$(\vec{a},\ \vec{b})$に1つの実数$\langle\vec{a},\ \vec{b}\rangle$を対応させる対応の規則$\langle\ ,\ \rangle$で内積の公理を満たすものが与えられたとき，1つのベクトル $\vec{a}$ に1つの実数 $\sqrt{\langle\vec{a},\ \vec{a}\rangle}$〔(IP1)から，$\langle\vec{a},\ \vec{a}\rangle\geqq 0$ であるので確かに $\sqrt{\langle\vec{a},\ \vec{a}\rangle}$ は実数である〕を対応させる対応の規則は大きさの公理を満たすことを示そう：実際，(N1)は(IP1)から直ちに満たされる．(N2)は，

$$\sqrt{\langle m\vec{a},\ m\vec{a}\rangle}\underset{\text{(IP3)}}{=}\sqrt{m^2\langle\vec{a},\ \vec{a}\rangle}=\sqrt{m^2}\sqrt{\langle\vec{a},\ \vec{a}\rangle}$$

により満たされることがわかる．(N3)が満たされることを示すため，まず，

$$|\langle\vec{a},\ \vec{b}\rangle|\leqq\sqrt{\langle\vec{a},\ \vec{a}\rangle}\sqrt{\langle\vec{b},\ \vec{b}\rangle}\ \cdots\cdots\ ①$$

を示そう：実際，$\vec{b}=\vec{0}$ のときは $\langle\vec{a},\ \vec{b}\rangle=\langle\vec{a},\ \vec{0}\rangle$
$=\langle\vec{a},\ 0\cdot\vec{0}\rangle\underset{\text{(IP3)}}{=}0\langle\vec{a},\ \vec{0}\rangle=0$, $\langle\vec{b},\ \vec{b}\rangle=\langle\vec{0},\ \vec{0}\rangle$
$\overset{\text{(IP1)}}{=}0$ により①は成立する．
よって，以下 $\vec{b}\neq\vec{0}$ として①の成立を示す：
いま，$m=\dfrac{\langle\vec{a},\ \vec{b}\rangle}{\langle\vec{b},\ \vec{b}\rangle}$ とおき，次の計算を行う．

$$\langle\vec{a}-m\vec{b},\ \vec{a}-m\vec{b}\rangle\underset{\text{(IP3)}}{=}\langle\vec{a},\ \vec{a}\rangle-m\langle\vec{a},\ \vec{b}\rangle-m\langle\vec{b},\ \vec{a}\rangle+m^2\langle\vec{b},\ \vec{b}\rangle$$

$$\overset{\text{(IP2)}}{=}\langle\vec{a},\ \vec{a}\rangle-2m\langle\vec{a},\ \vec{b}\rangle+m^2\langle\vec{b},\ \vec{b}\rangle$$

$$=\langle\vec{a},\ \vec{a}\rangle-\frac{\langle\vec{a},\ \vec{b}\rangle^2}{\langle\vec{b},\ \vec{b}\rangle}$$

ゆえに，$\langle\vec{a}-m\vec{b},\ \vec{a}-m\vec{b}\rangle\geqq 0$〔$\because$(IP1)〕により，

$$\langle\vec{a},\ \vec{a}\rangle\geqq\frac{\langle\vec{a},\ \vec{b}\rangle^2}{\langle\vec{b},\ \vec{b}\rangle}$$

よって，①が成り立つ．

さて，いよいよ，(N3)が満たされることを示そう：実際，

$$\langle\vec{a}+\vec{b},\ \vec{a}+\vec{b}\rangle\overset{\text{(IP3)}}{=}\langle\vec{a},\ \vec{a}\rangle+\langle\vec{a},\ \vec{b}\rangle+\langle\vec{b},\ \vec{a}\rangle+\langle\vec{b},\ \vec{b}\rangle$$

$$\overset{\text{(IP2)}}{=}\left(\sqrt{\langle\vec{a},\ \vec{a}\rangle}\right)^2+2\langle\vec{a},\ \vec{b}\rangle+\left(\sqrt{\langle\vec{b},\ \vec{b}\rangle}\right)^2$$

$$\underset{①}{\leqq}\left(\sqrt{\langle\vec{a},\ \vec{a}\rangle}\right)^2+2\sqrt{\langle\vec{a},\ \vec{a}\rangle}\sqrt{\langle\vec{b},\ \vec{b}\rangle}+\left(\sqrt{\langle\vec{b},\ \vec{b}\rangle}\right)^2$$

$$=\left(\sqrt{\langle\vec{a},\ \vec{a}\rangle}+\sqrt{\langle\vec{b},\ \vec{b}\rangle}\right)^2$$

から，$\sqrt{\langle\vec{a}+\vec{b},\ \vec{a}+\vec{b}\rangle}\leqq\sqrt{\langle\vec{a},\ \vec{a}\rangle}+\sqrt{\langle\vec{b},\ \vec{b}\rangle}$
が得られて，(N3) も満たされることが示された．

このように内積は大きさをも量的に扱う‼

§2. 内積の具体例（その１）

n を自然数として，n 個の実数の組

$$(x_1,\ x_2,\ \cdots\cdots,\ x_n)$$

全体の集まりを **n次元実 Euclid 空間**と呼ぶ．

1 次元実 Euclid 空間は（実）数直線，

2 次元実 Euclid 空間は座標平面，

3 次元実 Euclid 空間は座標空間

であるが，4 次元以上には，もはや幾何学的 model は存在しない．

2 次元実 Euclid 空間の構成要素 $(x_1,\ x_2)$ を，平面上のベクトルの成分表示とみなすと，2 次元実 Euclid 空間は平面ベクトル全体の集まりと考えることもできる．

そして，そのとき，2 つの平面ベクトル $(a_1,\ a_2)$, $(b_1,\ b_2)$ のなす角や内積，あるいは，1 つの平面ベクトル $(a_1,\ a_2)$ の大きさを考察の対象にすることができたことは周知の事実である．

さて，以下では，4 次元 Euclid 空間の構成要素

$$(x_1,\ x_2,\ x_3,\ x_4)$$

も**ベクトル**であるということを説明しよう：

4 次元 Euclid 空間には，もはや幾何学的 model が存在しないので，その構成要素を大きさと向きをもつ量としてのベクトルとして把握することはできないが，以下に説明する理由によって

$$(x_1,\ x_2,\ x_3,\ x_4)$$

もベクトルなのである．その説明のために平面ベクトル $(x_1,\ x_2)$ たちが満たしている 8 個の性質を以下に列挙する：

(V1)　(加法の結合法則)

$$\{(a_1,\ a_2)+(b_1,\ b_2)\}+(c_1,\ c_2)$$
$$=(a_1,\ a_2)+\{(b_1,\ b_2)+(c_1,\ c_2)\}$$

(V2)　(零ベクトルの存在)

$$(a_1,\ a_2)+(0,\ 0)=(0,\ 0)+(a_1,\ a_2)=(a_1,\ a_2)$$

(V3)　(逆ベクトルの存在)

$$(a_1,\ a_2)+(-a_1,\ -a_2)=(-a_1,\ -a_2)+(a_1,\ a_2)$$
$$=(0,\ 0)$$

(V4)　(加法の交換法則)

$$(a_1,\ a_2)+(b_1,\ b_2)=(b_1,\ b_2)+(a_1,\ a_2)$$

(V5)　(実数倍の単位法則)

$$1\cdot(a_1,\ a_2)=(a_1,\ a_2)$$

(V6)　(実数倍の結合法則)

任意の実数 m, n に対して

$$m(n(a_1,\ a_2))=(mn)(a_1,\ a_2)$$

(V7)　(左分配法則)

任意の実数 m, n に対して

$$(m+n)(a_1,\ a_2)=m(a_1,\ a_2)+n(a_1,\ a_2)$$

(V8)　(右分配法則)

任意の実数mに対して

$$m\{(a_1,\ a_2)+(b_1,\ b_2)\}=m(a_1,\ a_2)+m(b_1,\ b_2)$$

この (V1)～(V8) は**ベクトル空間の公理**と呼ばれる．
そして，2 次元実 Euclid 空間は，その構成要素たちがベクトル空間の公理を満たしているゆえをもって，**ベクトル空間**であると言われる．

さて，4 次元実 Euclid 空間の構成要素の間に加法と実数倍とを

$$(a_1,\ a_2,\ a_3,\ a_4)+(b_1,\ b_2,\ b_3,\ b_4)$$
$$=(a_1+b_1,\ a_2+b_2,\ a_3+b_3,\ a_4+b_4),$$
$$m\cdot(a_1,\ a_2,\ a_3,\ a_4)=(ma_1,\ ma_2,\ ma_3,\ ma_4)$$

のように natural に定義すると，4 次元実 Euclid 空間の構成要素たちもベクトル空間の公理を満たすことが容易にわかるであろう．

すなわち 4 次元実 Euclid 空間の構成要素

$$(x_1,\ x_2,\ x_3,\ x_4)$$

はベクトル空間の構成要素であるがゆえに，**ベクトル**なのである．

以下では 4 次元実 Euclid 空間の 2 つのベクトル $\boldsymbol{a}=(a_1,\ a_2,\ a_3,\ a_4)$, $\boldsymbol{b}=(b_1,\ b_2,\ b_3,\ b_4)$ の内積 $\langle\boldsymbol{a},\ \boldsymbol{b}\rangle$ の canonical な example として

$$\langle\boldsymbol{a},\ \boldsymbol{b}\rangle=a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3+a_4b_4\ \cdots\cdots\ ②$$

と定義したとき，対応の規則 $\langle\ ,\ \rangle$ が内積の公理を満たすことを示そう：

実際，(IP1) の正値性と (IP2) の対称性が満たされることは明らかである．(IP3) の双線型性が満たさ

れることを示すためには，(IP2)の成立によって，

$\langle \boldsymbol{a},\ m\boldsymbol{b}+n\boldsymbol{c}\rangle=m\langle \boldsymbol{a},\ \boldsymbol{b}\rangle+n\langle \boldsymbol{a},\ \boldsymbol{c}\rangle$

のみ示せばよいのであるが，

$$\begin{aligned}\text{左辺}&=a_1(mb_1+nc_1)+a_2(mb_2+nc_2)\\&\quad+a_3(mb_3+nc_3)+a_4(mb_4+nc_4)\\&=m(a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3+a_4b_4)\\&\quad+n(a_1c_1+a_2c_2+a_3c_3+a_4c_4)=\text{右辺}\end{aligned}$$

となって確かに成り立つ．

そして，内積の公理を満たす対応の規則が内積なのであるから，②は内積の１つの具体例である．

§3. 内積の具体例(その２)

ベクトル空間の構成要素が必ずしも大きさと向きをもつ量である必要のないことは，前節で述べた通りである．

ここでは新しいベクトル空間と，その内積を例示しよう：

0以上1以下の実数全体の集まりを[0, 1]という記号で表し，**閉区間**[0, 1]と呼ぶ．閉区間[0, 1]で定義された連続関数全体の集まりをC[0, 1]という記号で表す．C[0, 1]はベクトル空間であることを確かめよう：

そのためにはC[0, 1]の構成要素たちがベクトル空間の公理を満たしていることを確認すればよいが，

$(f+g)+h=f+(g+h)$ であるから

(V1)は満たされ，

$f+0=0+f=f$ であるから

(V2)も満たされ，

$f+(-f)=(-f)+f=0$ であるから

(V3)も満たされ，

$f+g=g+f$ であるから

(V4)も満たされ，

$1\cdot f=f$ であるから

(V5)も満たされ，

任意の実数 m, n に対して，$m(nf)=(mn)f$ であるから

(V6)も満たされ，

任意の実数 m, n に対して，$(m+n)f=mf+nf$ であるから

(V7)も満たされ，

任意の実数mに対して，$m(f+g)=mf+mg$ であるから

(V8)も満たされる．

以上によってC[0, 1]は確かにベクトル空間である．そして f, g の内積 $\langle f,\ g\rangle$ の canonical な example として

$$\langle f,\ g\rangle=\int_0^1 f(x)g(x)dx \quad \cdots\cdots \text{③}$$

と定義したとき，対応の規則 $\langle\ ,\ \rangle$ が内積の公理を満たすことを示そう：

実際，(IP1)の正値性と(IP2)の対称性が満たされることは明らかである．(IP3)の双線型性が満たされることを示すためには，(IP2)の成立によって，

$\langle f,\ mg+nh\rangle=m\langle f,\ g\rangle+n\langle f,\ h\rangle$

のみ示せばよいのであるが，

$$\begin{aligned}\text{左辺}&=\int_0^1 f(x)\{mg(x)+nh(x)\}dx\\&=m\int_0^1 f(x)g(x)dx+n\int_0^1 f(x)h(x)dx=\text{右辺}\end{aligned}$$

となって確かに成り立つ〔∵積分の線型性〕．

よって，③も内積の１つの具体例である．

§1でみたように，$\|f\|=\sqrt{\langle f,\ f\rangle}$ は大きさの公理を満たす．対応の規則 $\|\ \|$ は屢**Norm**(ノルム)と呼ばれる．ノルムとは大きさの概念を拡張したものである．

$$\|f\|=\sqrt{\int_0^1\{f(x)\}^2dx}$$

であるから，例えば $f(x)=x$, $g(x)=x^2$ のとき

$$\|f\|=\|x\|=\sqrt{\int_0^1 x^2dx}=\frac{1}{\sqrt{3}},$$

$$\|g\|=\|x^2\|=\sqrt{\int_0^1 x^4dx}=\frac{1}{\sqrt{5}}$$

である．ベクトル空間C[0, 1]は連続関数全体の集まりという極めて抽象的なものであるが，そこに上のような内積を定めると，個々の関数のノルムが定まり，関数のような抽象的なものの‘大きさ’を数学的議論という土俵の上へ載せることが出来る．このようにしてC[0, 1]の理論は豊かな実りを結ぶのである．

〈参　考　文　献〉

藤田　宏，黒田成俊　著；関数解析Ⅰ；
岩波講座　基礎数学；岩波書店．

(静岡県立三島北高等学校)