

# 包絡線について

いしだ みつり  
石田 充学

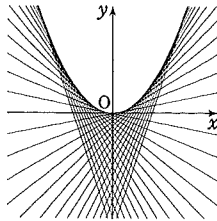
数研通信 No.20 松田康雄氏の研究(Simson 線の包絡線がデルトイドになること)を読み, その鮮かさと意外さにすっかり魅せられてしまいました。

ここではこの事実を複素数平面で考察するとともに, 包絡線の考え方を整理し, 「数学C」に登場する様々な曲線との関係についても考えてみたいと思います。

## 1. 準備

包絡線の最も基本的な例としては, 次に述べる接線群によるものがわかり易いでしょう。例えば, 放物線  $y=x^2$  上の点  $(t, t^2)$

における接線の方程式は,  $y=2tx-t^2$  で与えられます。この直線(接線)群  $y=2tx-t^2$  において,  $t$  の値を変化させて図示してみると, 右図のように



放物線  $y=x^2$  が浮かび上がってきます(当然のことですが……)。つまり, 放物線  $y=x^2$  は, 直線群  $y=2tx-t^2$  の接点の軌跡となっています。このとき, 放物線  $y=x^2$  を直線群  $y=2tx-t^2$  の包絡線といいます(包絡線の正確な定義は後述)。

この場合の例もそうですが, 包絡線は, 曲線(直線)群の通過領域の境界としてしばしば登場します。

**例題 1** 直角双曲線  $xy=\frac{a^2}{4}$  上の動点 P を中心とし, 定点 O(原点)を通る円群の通過領域を求めよ。

**略解**  $P\left(t, \frac{a^2}{4t}\right)$  とすると, 円群は次式で与えられる。

$$(x-t)^2 + \left(y - \frac{a^2}{4t}\right)^2 = t^2 + \left(\frac{a^2}{4t}\right)^2$$

$$\therefore 4xt^2 - 2(x^2 + y^2)t + a^2y = 0$$

よって, 円群の通過領域は,  $t$  の実数条件から

$$D/4 = (x^2 + y^2)^2 - 4a^2xy \geq 0$$

極方程式で表すと

$$r^4 - 4a^2 \cdot r \cos \theta \cdot r \sin \theta \geq 0$$

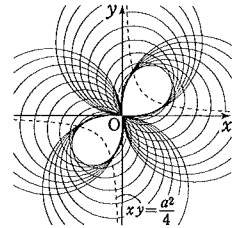
$$\therefore r^2 \geq 2a^2 \sin 2\theta$$

これは, レムニスケート

$r^2 = 2a^2 \cos 2\theta$  を O を中

心に  $\frac{\pi}{4}$  回転した曲線の

外部及び周上である。■



では, 本題に入る前に

準備をします。以下, 複

素数平面では, 適宜, 点

を小文字アルファベットで表し, あわせて複素数表示も兼ねることとし,  $\cos \theta + i \sin \theta = e^{i\theta}$  と表記することにします。

なお, 次の定理 1~3 はあまりに著名ですので証明は割愛します。

**定理 1** 三角形の 3 辺の中点, 3 頂点から対辺に下ろした垂足, 3 頂点と垂心を結ぶ線分の midpoint の 9 点は同一円周上に存在する(この円を九点円という)。

**定理 2**  $\triangle abc$  の外心 O を原点とする複素数平面において, 次の 1)~3) が成り立つ。

1) 頂点  $a$  から対辺  $bc$  に下ろした垂足  $d$  は

$$d = \frac{1}{2} \left( a + b + c - \frac{bc}{a} \right)$$

2) 九点円の中心  $n$  は  $n = \frac{1}{2}(a + b + c)$

3) 九点円の半径は  $\frac{R}{2}$  ( $R$  は外接円の半径)

**定理 3**  $e^{i\alpha} - e^{i\beta} = 2i \sin \frac{\alpha - \beta}{2} e^{i\frac{\alpha + \beta}{2}}$  が成り立つ。

(ただし,  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ )

**定理 4** ハイポ(内)サイクロイドの複素数表示は,

固定円の半径を1, 回転円の半径を  $\frac{1}{n}$  とすると

$$nz = (n-1)e^{i\theta} + e^{-i(n-1)\theta} \dots\dots ①$$

エピ(外)サイクロイドは,

$$nz = (n+1)e^{i\theta} - e^{i(n+1)\theta} \dots\dots ②$$

(②は①において,  $n$  を  $-n$  におき換えたものになっている)

証明 右図において,  $\angle aOc = \theta$  とおくと,

$\widehat{ap} = \widehat{zp}$ ,  $\angle zcp = n\theta$  であるから

$$z = \vec{Oc} + \vec{cz} = \left(1 - \frac{1}{n}\right)e^{i\theta} + \frac{1}{n}e^{i(\theta - n\theta)}$$

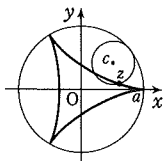
$$\therefore nz = (n-1)e^{i\theta} + e^{-i(n-1)\theta}$$

エピサイクロイドについても同様である. ■

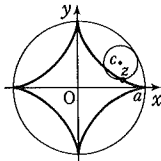
このように複素数平面で表示すると, きわめて簡明な形で表すことができます.

特に, ハイポサイクロイドで  $n=3, 4$  のものをそれぞれ

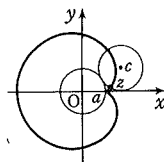
デルトイド(“三角”形), アステロイド(星芒形),  
更にエピサイクロイドで  $n=1, 2$  のものをそれぞれ  
カージョイド(心臓形), ネフロイド(腎臓形)  
と呼ぶのは周知の通りです.



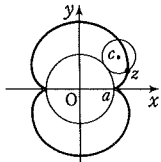
デルトイド



アステロイド



カージョイド



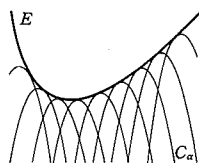
ネフロイド

## 2. 包絡線とは?

定義 曲線群  $C_a$ :

$f(x, y, a) = 0$  のすべての曲線がある定曲線  $E$  に接するとき,  $E$  をこの曲線群の包絡線

という(つまり,  $E$  の点  $C_a$  のいずれかの上)にあり, かつそこで  $C_a$  と共通の接線をもつ).



定理5 曲線  $E: x = \varphi(a), y = \psi(a)$  が曲線群

$C_a: f(x, y, a) = 0$  の包絡線である.

$\Rightarrow f(\varphi(a), \psi(a), a) = 0$  かつ  $f_a(\varphi(a), \psi(a), a) = 0$

注  $f_a(\varphi(a), \psi(a), a)$  は  $f(x, y, a)$  を  $a$  で偏微分 ( $a$  以外の文字を定数とみなして  $a$  で微分) した式に,  $x = \varphi(a), y = \psi(a)$  を代入した式を表します. 同じことを  $\frac{\partial}{\partial a} f(\varphi(a), \psi(a), a)$  とも表します.

証明  $C_a: f(x, y, a) = 0$  が  $E$  上の点  $(\varphi(a), \psi(a))$  を共有するから,  $f(\varphi(a), \psi(a), a) = 0$

この式を  $a$  で微分すると

$$\begin{aligned} f_x(\varphi(a), \psi(a), a) \cdot \varphi'(a) \\ + f_y(\varphi(a), \psi(a), a) \cdot \psi'(a) \\ + f_a(\varphi(a), \psi(a), a) = 0 \dots\dots ③ \end{aligned}$$

一方, 点  $(\varphi(a), \psi(a))$  において共通の接線をもつから  $(f_x(\varphi(a), \psi(a), a), f_y(\varphi(a), \psi(a), a))$   $C_a$  の勾配(法線)ベクトル

$$\perp (\varphi'(a), \psi'(a))$$

$$\therefore f_x(\varphi(a), \psi(a), a) \cdot \varphi'(a)$$

$$+ f_y(\varphi(a), \psi(a), a) \cdot \psi'(a) = 0 \dots\dots ④$$

③, ④より  $f_a(\varphi(a), \psi(a), a) = 0$  ■

注  $f(\varphi(a), \psi(a), a) = 0, f_a(\varphi(a), \psi(a), a) = 0$  は,  $E$  が  $C_a$  の包絡線であるための必要条件であって, この条件を満たすものがすべて包絡線になるとは限りません.

逆に,  $f(x, y, a) = 0, f_a(x, y, a) = 0$  より,  $x, y$  について解いて,  $x = \varphi_1(a), y = \psi_1(a)$  が得られたとすると, ④において,

$f_x(\varphi_1(a), \psi_1(a), a) = f_y(\varphi_1(a), \psi_1(a), a) = 0$  のとき(特異点)は,  $(f_x, f_y) \perp (\varphi_1'(a), \psi_1'(a))$  の条件が崩れています(つまり包絡線以外に, 特異点の軌跡も含まれてしまう).

したがって,  $x = \varphi_1(a), y = \psi_1(a)$  が包絡線の条件を満足するか確認しておく必要があるわけです.

定理5を例題1に適用すると,

$$4xt^2 - 2(x^2 + y^2)t + a^2y = 0 \dots\dots ⑤$$

の両辺を  $t$  で偏微分(つまり  $x, y$  を定数とみて  $t$  で微分)して  $8xt - 2(x^2 + y^2) = 0 \dots\dots ⑥$

⑤, ⑥より  $t$  を消去して  $(x^2 + y^2)^2 = 4a^2xy$  が得られます. 厳密には, これが包絡線の条件を満足していることを確認しておく必要がありますが, 誌面の制約もあり割愛します(以下も同様).

さて、定理5は高校の範囲を超えていますから、高校生にも理解できるアプローチを考えてみましょう。次の例題2の手法は過去の大学入試問題にも同じ趣旨の出題が見られます。

**例題2**  $x$  軸、 $y$  軸上の動点をそれぞれ  $P$ 、 $Q$  とする。  $PQ=l$  (一定) を満足する線分について (簡単のため、第1象限で考察する)

- 1) 線分  $PQ$  の方程式は  $\frac{x}{\cos \alpha} + \frac{y}{\sin \alpha} = l$   
 $(0 < \alpha < \frac{\pi}{2})$  と表されることを示せ。
- 2) 2つの線分  $\frac{x}{\cos \alpha} + \frac{y}{\sin \alpha} = l$ ,  $\frac{x}{\cos \beta} + \frac{y}{\sin \beta} = l$   
 $(0 < \alpha, \beta < \frac{\pi}{2})$  の交点は、 $\beta$  が限りなく  $\alpha$  に近づくとき、どのような点 ( $R$  とする) に近づくか。

**略解** 1)  $\angle OPQ = \alpha$  とおけば容易。

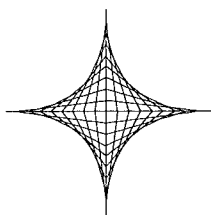
2) 交点は  $(l \cdot \frac{\cos \alpha \cos \beta (\sin \beta - \sin \alpha)}{\sin(\beta - \alpha)}, l \cdot \frac{-\sin \alpha \sin \beta (\cos \beta - \cos \alpha)}{\sin(\beta - \alpha)})$

である。ここで、

$$\lim_{\beta \rightarrow \alpha} \frac{\sin \beta - \sin \alpha}{\sin(\beta - \alpha)} = \lim_{\beta \rightarrow \alpha} \frac{\beta - \alpha}{\sin(\beta - \alpha)} \cdot \frac{\sin \beta - \sin \alpha}{\beta - \alpha} = 1 \cdot (\sin x)'_{x=\alpha} = \cos \alpha$$

等から、 $R(l \cos^3 \alpha, l \sin^3 \alpha)$  が得られる。 ■

ここで、 $\alpha$  を変化させると、点  $R$  はアステロイドを描くことがわかります。これが線分  $PQ$  を変化させたときの包絡線を表します。



この手法は、曲線群  $C_\alpha$  に属する2曲線  $f(x, y, \alpha) = 0$ ,  $f(x, y, \beta) = 0$  ( $\alpha \neq \beta$ ) の交点  $(x(\alpha, \beta), y(\alpha, \beta))$  において、極限  $\beta \rightarrow \alpha$  をとると包絡線上の点に限りなく近づくという直観的な性質に基づいています。一般的にいうと、2曲線の交点  $(x, y)$  において、 $f(x, y, \alpha) = 0$ ,  $f(x, y, \beta) = 0$  より、 $x, y$  を定数とみて Rolle の定理を用いると、 $\alpha < \gamma < \beta$ , または  $\beta < \gamma < \alpha$  なる  $\gamma$  が存在して、 $f_\alpha(x, y, \gamma) = 0$  が成立しますから、この式において、 $\beta \rightarrow \alpha$  とすると  $\gamma \rightarrow \alpha$  より  $f_\alpha(x, y, \alpha) = 0$  が

得られるわけです。これは、定理5の結論と一致しています。次に、線分  $PQ$  を

$$y = l \sin \alpha - x \tan \alpha \dots\dots \textcircled{7}$$

と変形し、例題3のように  $PQ$  の通過領域を求めると、 $\alpha$  で偏微分することの意味がより鮮明になるでしょう。

**例題3**  $\textcircled{7}$  (ただし、 $x > 0, y > 0, 0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$ ) において、 $x$  を固定し  $\alpha$  を変化させたときの  $y$  のとりうる値の範囲を  $x$  を用いて表せ。

**解**  $x$  を定数とみて、 $y$  を  $\alpha$  で微分 (つまり偏微分)

すると、 $\frac{dy}{d\alpha} = l \cos \alpha - \frac{x}{\cos^2 \alpha} = \frac{l \cos^3 \alpha - x}{\cos^2 \alpha}$

$$\frac{dy}{d\alpha} = 0 \text{ より } x = l \cos^3 \alpha$$

$$\therefore \cos \alpha = \left(\frac{x}{l}\right)^{\frac{1}{3}}$$

$y$  の  $\alpha$  に対する増減は右表のようになるから

|                      |   |   |   |   |
|----------------------|---|---|---|---|
| $\alpha$             | 0 |   | $\cos^{-1}\left(\frac{x}{l}\right)^{\frac{1}{3}}$ |   |
| $\frac{dy}{d\alpha}$ |   | + | 0   | - |
| $y$                  | 0 | ↗ |   | ↘ |

$$y_{\text{MAX}} = \sqrt{1 - \left(\frac{x}{l}\right)^{\frac{2}{3}}} \left\{ l - x \cdot \left(\frac{l}{x}\right)^{\frac{1}{3}} \right\} = \left( l^{\frac{2}{3}} - x^{\frac{2}{3}} \right)^{\frac{3}{2}}$$

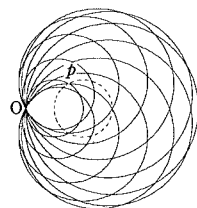
$$\text{よって、} 0 < y \leq \left( l^{\frac{2}{3}} - x^{\frac{2}{3}} \right)^{\frac{3}{2}} \quad \blacksquare$$

ここで、 $x$  を変化させると、線分  $PQ$  の通過領域は、アステロイド  $x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = l^{\frac{2}{3}}$  の内部及び周上の第1象限の部分であることがわかります。

### 3. 個性豊かな包絡線たち

様々な包絡線の華麗な世界を例題2の手法により、複素数平面で考えて楽しんでみましょう。

**定理6** 定円の周上の動点  $p$  を中心とし、定点  $O$  を通る円群の包絡線はリマソン (極方程式で  $r = a \cos \theta + b$  の形で表される曲線。蝸牛線ともいう) である。



証明 円群の方程式は、 $|z-p|=|p|$  より

$$(z-p)(\bar{z}-\bar{p})=p\bar{p}$$

ここで、 $p=a+be^{i\theta}$  ( $a, b \in \mathbb{R}$ )、 $e^{i\theta}=u$  とおくと

$$\bar{z} = \frac{\bar{p}z}{z-p} = \frac{\left(a + \frac{b}{u}\right)z}{z-a-bu} \dots\dots \textcircled{8}$$

ここで、2円  $\textcircled{8}$  及び  $\bar{z} = \frac{\left(a + \frac{b}{v}\right)z}{z-a-bv}$  ( $u \neq v$ ) の

$z=0$  以外の交点は、 $\frac{a + \frac{b}{u}}{z-a-bu} = \frac{a + \frac{b}{v}}{z-a-bv}$  より

$$z = a(1+uv) + b(u+v)$$

ここで、 $v \rightarrow u$  とすると

$$z = a(1+u^2) + 2bu = a(1+e^{2i\theta}) + 2be^{i\theta}$$

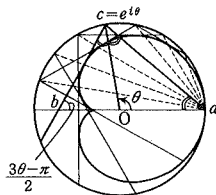
極方程式で表すため、 $e^{i\theta}$  でくくると

$$z = \{a(e^{-i\theta} + e^{i\theta}) + 2b\}e^{i\theta} = 2(a \cos \theta + b)e^{i\theta}$$

$a \cos \theta + b \in \mathbb{R}$  より、リマソン  $r = 2(a \cos \theta + b)$  を表すことがわかる(特に定円が0を通るとき、つまり  $|a|=|b|$  のときは、カージオイドになる)。■

このように、複素数平面でも同じ考え方で包絡線が得られます。

定理7 定円の周上の定点から出た光線が、定円に当たって反射した光線の包絡線(火線)はカージオイドである(光線によって生じる包絡線のことを火線または焦線と呼びます)。



証明 定円の半径を1とする。上図の定点  $a$  から出た光線が点  $c (=e^{i\theta})$  で反射するとき、 $\angle aOc = \theta$

とおくと、 $\angle cbO = \frac{3\theta - \pi}{2}$  である。

よって、反射光線の方程式は

$$z - e^{i\theta} = te^{i \cdot \frac{3\theta - \pi}{2}} \quad (t \in \mathbb{R})$$

$$\therefore e^{-\frac{3}{2}i\theta}z - e^{-\frac{1}{2}i\theta} = -it$$

両辺、共役をとって、 $t$  を消去すると

$$e^{-\frac{3}{2}i\theta}z - e^{-\frac{1}{2}i\theta} + e^{\frac{3}{2}i\theta}\bar{z} - e^{\frac{1}{2}i\theta} = 0$$

$e^{i\theta} = u$  とおくと

$$\bar{z} = -u^{-3}z + u^{-1} + u^{-2} \dots\dots \textcircled{9}$$

定理6と同様

$\bar{z} = -v^{-3}z + v^{-1} + v^{-2}$  ( $u \neq v$ ) より

$$-u^{-3}z + u^{-1} + u^{-2} = -v^{-3}z + v^{-1} + v^{-2}$$

$$\therefore z = \frac{\left(\frac{1}{v} - \frac{1}{u}\right) + \left(\frac{1}{v^2} - \frac{1}{u^2}\right)}{\frac{1}{v^3} - \frac{1}{u^3}} = \frac{u^2v^2 + uv(u+v)}{u^2 + uv + v^2}$$

ここで、 $v \rightarrow u$  とした結果を改めて  $z$  とおくと

$$z = \frac{1}{3}(2u + u^2) = \frac{1}{3}(2e^{i\theta} + e^{2i\theta}) \dots\dots \textcircled{10}$$

$\theta = \theta' + \pi$  とおくと  $z = -\frac{1}{3}(2e^{i\theta'} - e^{2i\theta'})$

よって、定理4よりカージオイドであることがわかる。■

なお、複素微分を定理5に形式的に(大胆にも)適用してみると、 $\textcircled{9}$ において

$$\frac{\partial}{\partial u}(-u^{-3}z + u^{-1} + u^{-2}) = 0 \text{ として}$$

$$3u^{-4}z - u^{-2} - 2u^{-3} = 0 \text{ より } \textcircled{10} \text{ が導かれます。}$$

これは、2直(曲)線  $\bar{z} = f(z, u)$ 、 $\bar{z} = f(z, v)$

( $u \neq v$ ) の交点  $z$  において、 $f(z, u) - f(z, v) = 0$

平均値の定理より、 $u, v$  を結ぶ線分上に点  $w$  が存在して

$$(u-v) \cdot f_u(z, w) = 0 \dots\dots \textcircled{11}$$

$u \neq v$  より

$$f_u(z, w) = 0$$

ここで  $v \rightarrow u$  とすると、 $w \rightarrow u$  より

$$f_u(z, u) = 0$$

で成立……といたいところですが、厳密には複素数における平均値の定理は $\textcircled{11}$ の形では書きません。 $(\textcircled{11}$ はウソです!)

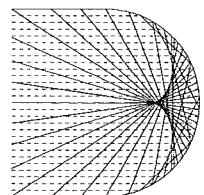
$\textcircled{11}$ は、正しくは実部と虚部別々に、線分  $\overline{uw}$  上にそれぞれ  $w_1, w_2$  が存在して

$$(u-v)\{\text{Re}f_u(z, w_1) + i\text{Im}f_u(z, w_2)\} = 0$$

となります。

$v \rightarrow u$  のとき  $w_1 \rightarrow u, w_2 \rightarrow u$  ですから、実数の場合と同様、複素数の場合も  $f_u(z, u) = 0$  が成り立つといえます。

定理8 平行に入射する光線が定円の内側で反射するとき、その反射光線の包絡線(火線)はネフロイド(の一部)である。



証明(概略) 定円の半径を1とする。右図の円周上の点

$e^{i\theta}$  における反射光線の方程

式は、図より、

$$z = e^{i\theta} + te^{2i\theta} \quad (t \in \mathbb{R})$$

であるから、同様にして包絡線

$$2z = \frac{1}{2}(3e^{i\theta} - e^{3i\theta})$$

を得る。定理4より、この曲線はネフロイド

(固定円、回転円の半径がそれぞれ、 $\frac{1}{2}, \frac{1}{4}$ )であることがわかる。■

この現象は、円筒状の不透明なコップの底を上から覗くと観察することができます(「数研通信 No. 19」宮川幸隆氏の研究を参照してください)。

#### 4. Simson 線の包絡線

**定理9 (Simson の定理)**  $\triangle abc$  の外接円  $O$  上の任意の点  $p$  から  $\triangle abc$  の各辺に下ろした垂線の足は同一直線上に存在する(この直線を **Simson 線** という)。

**証明**  $O$  を原点とする複素数平面で考えよう。直線  $bc, ca, ab$  に下ろした垂線の足をそれぞれ  $d_1, d_2, d_3$  とすると、定理2の1)より

$$\begin{aligned} d_2 - d_1 &= \frac{1}{2} \left( p + c + a - \frac{ca}{p} \right) \\ &\quad - \frac{1}{2} \left( p + b + c - \frac{bc}{p} \right) \\ &= \frac{1}{2p} (a-b)(p-c) \dots\dots \textcircled{12} \end{aligned}$$

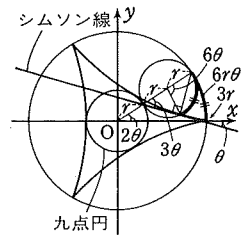
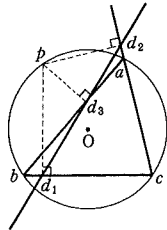
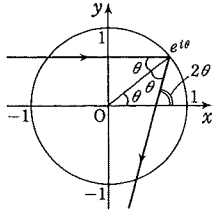
同様に  $d_3 - d_1 = \frac{1}{2p} (a-c)(p-b)$

$$\therefore \frac{d_2 - d_1}{d_3 - d_1} = \frac{(a-b)(p-c)}{(a-c)(p-b)} \in \mathbb{R}$$

( $\because a, b, c, p$  は同一円周上にある)

よって、 $d_1, d_2, d_3$  は同一直線上にある。■

**定理10**  $\triangle abc$  の Simson 線の包絡線はデルトイドである。 $\triangle abc$  の九点円の中心を  $n$ 、半径を  $r$  とすると、デルトイドの固定円は中心  $n$ 、半径  $3r$ 、回転円は半径  $r$  である。



**証明** 定理9において、外接円の半径を  $R$  とし、 $a = Re^{2i\alpha}, b = Re^{2i\beta}, c = Re^{2i\gamma}, p = Re^{2i\theta}$  と表し、更に原点  $O$  が九点円の中心  $n = \frac{1}{2}(a+b+c)$  となるように平行移動して考える。 $d_1, d_2$  を平行移動した点を  $d'_1, d'_2$  とすると、(定理1, 2参照)

$$\begin{aligned} d'_1 &= d_1 - n = \frac{1}{2} \left( p - a - \frac{bc}{p} \right) \\ &= r \{ e^{2i\theta} - e^{2i\alpha} - e^{2i(\beta+\gamma-\theta)} \} \end{aligned}$$

等となる。

⑫より

$$\begin{aligned} d'_1 - d'_2 &= d_1 - d_2 = \frac{1}{2p} (a-b)(p-c) \\ &= \frac{1}{2Re^{2i\theta}} (Re^{2i\alpha} - Re^{2i\beta})(Re^{2i\theta} - Re^{2i\gamma}) \\ &= re^{-2i\theta} \cdot 2i \sin(\alpha-\beta) e^{i(\alpha+\beta)} \cdot 2i \sin(\theta-\gamma) \cdot e^{i(\theta+\gamma)} \\ &\quad \text{(定理3より)} \\ &= -4r \sin(\alpha-\beta) \sin(\theta-\gamma) e^{i(\alpha+\beta+\gamma-\theta)} \end{aligned}$$

よって、Simson 線は実軸の正の方向と角

$$\alpha + \beta + \gamma - \theta$$

をなすゆえ、Simson 線上の任意の点を  $z$  とすると

$$z - d'_1 = te^{i(\alpha+\beta+\gamma-\theta)} \quad (t \in \mathbb{R})$$

$$\begin{aligned} \therefore e^{-i(\alpha+\beta+\gamma-\theta)} (z - d'_1) &= t \\ e^{-i(\alpha+\beta+\gamma-\theta)} d'_1 &= e^{-i(\alpha+\beta+\gamma-\theta)} \cdot r \{ e^{2i\theta} - e^{2i\alpha} - e^{2i(\beta+\gamma-\theta)} \} \\ &= r \{ e^{i(3\theta-\alpha-\beta-\gamma)} - e^{i(\alpha-\beta-\gamma+\theta)} - e^{-i(\alpha-\beta-\gamma+\theta)} \} \\ &= r \{ e^{i(3\theta-\alpha-\beta-\gamma)} - t_1 \} \end{aligned}$$

ただし、 $t_1 = 2 \cos(\alpha-\beta-\gamma+\theta) \in \mathbb{R}$

簡単のために  $\alpha + \beta + \gamma = 2m\pi \quad (m \in \mathbb{Z})$  を満たすようにとると

$$\begin{aligned} e^{i\theta} z - re^{3i\theta} &= t + rt_1 \\ &\quad (\equiv s \in \mathbb{R} \text{ とおく}) \end{aligned}$$

$$\therefore z - re^{2i\theta} = se^{-i\theta} \dots \textcircled{13}$$

あとは、定理7の証明と同様の方法で計算すると、包絡線は、

$$z = r(2e^{2i\theta} + e^{-4i\theta})$$

となる。

$2\theta = \theta'$  とおくと、 $z = r(2e^{i\theta'} + e^{-2i\theta'})$  で定理4より、固定円の半径が  $3r$ 、回転円の半径が  $r$  のデルトイドを表すことがわかる。■

ここで、⑦を変形すると

$$x \sin \alpha + y \cos \alpha = \frac{l}{2} \sin 2\alpha \dots\dots \textcircled{14}$$

⑬を  $xy$  直交座標で表すと

$$x \sin \theta + y \cos \theta = r \sin 3\theta \quad \cdots \cdots \text{⑮}$$

⑭, ⑮の包絡線がそれぞれアステロイド, デルトイドであることから, 次のように一般化してみます.

**定理11** 直線  $x \sin \theta + y \cos \theta = \sin k\theta$  (ただし,  $k > 1, k \in \mathbb{Q}$ ) の包絡線はハイポサイクロイドであり, このときの固定円, 回転円の半径はそれぞれ  $k, \frac{k-1}{2}$  である.

**証明(概略)** 直線の方程式は,

$$\{x - \cos(k-1)\theta\} \sin \theta + \{y - \sin(k-1)\theta\} \cos \theta = 0$$

と変形できるので, この直線は, 点  $(\cos(k-1)\theta, \sin(k-1)\theta)$  を通り,  $x$  軸の正の方向と角  $-\theta$  をなすことがわかる. よって, 複素数平面においては,

$$z - e^{i(k-1)\theta} = te^{-i\theta} \quad (t \in \mathbb{R}) \quad \cdots \cdots \text{⑯}$$

と表される. あとは同様に, ⑯の包絡線

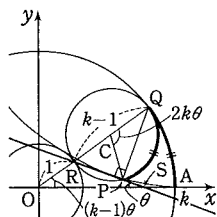
$$z = \frac{1}{2} \{ (k+1)e^{i(k-1)\theta} + (k-1)e^{-i(k+1)\theta} \}$$

を得る. これは, 固定円, 回転円の半径がそれぞれ  $k, \frac{k-1}{2}$  のハイポサイクロイドである. ■

この結果を幾何的に確かめてみましょう.

次の図において, 直線⑯は, 点  $R(e^{i(k-1)\theta})$  を通り,  $\angle OSR = \theta$  である直線.  $OR$  の  $R$  の方向への延長線上の点  $Q$  を

$RQ = k-1$  を満足するようにとり,  $RQ$  を直径とする円  $C$  (中心を  $C$  とする) と, 中心  $O$ , 半径  $k$  の円  $O$  を考える. 直線⑯と円  $C$  の  $R$  以外の交点を  $P$  とすると,



$\angle PRQ = k\theta$  より  $\angle PCQ = 2k\theta$  であるから

$$\widehat{PQ} = \widehat{AQ} = k(k-1)\theta$$

円  $C$  (半径  $\frac{k-1}{2}$ ) は円  $O$  (半径  $k$ ) に内接しているから, 点  $P$  は円  $O$  を固定円, 円  $C$  を回転円とするハイポサイクロイド上にある.

また,  $\theta$  を変化させたとき, 点  $P$  の回転の中心は点  $Q$  で,  $\angle QPR = \frac{\pi}{2}$  であるから, 直線⑯は点  $P$  においてハイポサイクロイドに接していることがわかる ( $\theta$  を変化させたとき, この瞬間の点  $P$  の運動方向は  $PR$  方向である).

よって,  $\theta$  を変化させると, 直線⑯全体はハイポサイクロイドの接線全体となっている.

**参考文献**

- [1] 数学 100の勝利 Vol. 2 平面図形の問題  
H. Dörrie (根上生也訳)  
シュプリンガー・フェアラーク東京
- [2] 曲線グラフ総覧 聖文社
- [3] 解析概論 高木貞治 岩波書店
- [4] 数研通信 No.20 「デルトイド一考」 松田康雄
- [5] 数研通信 No.19 「新作問題4題」 宮川幸隆

(京都府立鳥羽高等学校)