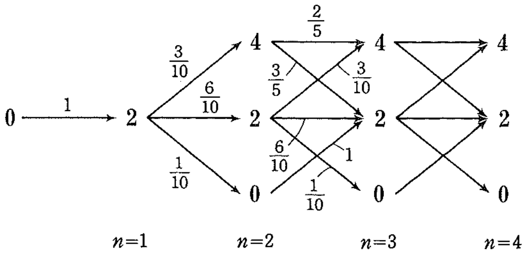
硬貨の裏返し

さかもと　しげる
坂本　茂

硬貨が5枚あり，そのうちの2枚を選んで裏返す操作をfとする．最初5枚ともウラにしておいて操作fをn回行うものとする．このときオモテの数と確率を考えると次の図のようになる．



1回目の操作fで必ずオモテ2であり，2回目以降もオモテが奇数枚になることはない．オモテ2のとき次の操作fでオモテ4，2，0となる確率はそれぞれ $\frac{{}_3C_2}{{}_5C_2}=\frac{3}{10}$，$\frac{{}_2C_1\cdot{}_3C_1}{{}_5C_2}=\frac{6}{10}$，$\frac{{}_2C_2}{{}_5C_2}=\frac{1}{10}$ であり，オモテ4のとき次の操作fでオモテ4，2となる確率はそれぞれ$\frac{2}{5}$，$\frac{3}{5}$である．

そこで操作fをn回行ったときにオモテが4，2，0枚である確率をそれぞれp_n，q_n，r_nとすれば，$p_n+q_n+r_n=1$であり

$$p_{n+1}=\frac{2}{5}p_n+\frac{3}{10}q_n,\quad r_{n+1}=\frac{1}{10}q_n$$

$$q_{n+1}=\frac{3}{5}p_n+\frac{6}{10}q_n+r_n$$

の漸化式を得る．
これから

$10p_{n+1}=4p_n+3q_n$，$10q_{n+1}=10-4p_n-4q_n$

となるから $\overrightarrow{p_{n+1}}=\overrightarrow{p_1}+A\overrightarrow{p_n}$ が成り立つ．ここで

$$\overrightarrow{p_n}=\begin{pmatrix}p_n\\q_n\end{pmatrix},\quad \overrightarrow{p_1}=\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix},\quad A=\frac{2}{5}\begin{pmatrix}1&\frac{3}{4}\\-1&-1\end{pmatrix}$$

である．いま，$n\to\infty$とするとき，$\overrightarrow{p_n}$に極限値があったと仮定すると，それは$\vec{x}=\overrightarrow{p_1}+A\vec{x}$を満たす$\vec{x}$である．

$$\vec{x}=-(A-E)^{-1}\overrightarrow{p_1}=\frac{1}{16}\begin{pmatrix}5\\10\end{pmatrix}$$

であるが，$\overrightarrow{x_n}=\overrightarrow{p_n}-\vec{x}$ として $\overrightarrow{x_{n+1}}=A\overrightarrow{x_n}$ であるから $\overrightarrow{x_n}=A^{n-1}\overrightarrow{x_1}$ となる．

行列Aのn乗は $A^2=5^{-2}E$，$A^3=5^{-2}A$，$A^4=5^{-4}E$，…… であるからnを奇数$2m-1$，偶数$2m$に分けて

$$A^{2m}=5^{-2m}E,\quad A^{2m-1}=5^{-2(m-1)}A$$

と表される．これより，$n\to\infty$ のとき $A^n\to O$ であることが分かる．したがって $n\to\infty$ のとき $\overrightarrow{x_n}\to\vec{0}$ であり，$\overrightarrow{p_n}\to\vec{x}$ となるから $\overrightarrow{p_n}$ に極限値 $\vec{x}$ が存在することがいえる．

$$\overrightarrow{p_n}=\vec{x}+A^{n-1}\overrightarrow{x_1},\quad \overrightarrow{x_1}=\overrightarrow{p_1}-\vec{x}$$

$$\vec{x}=\frac{1}{16}\begin{pmatrix}5\\10\end{pmatrix},\quad \overrightarrow{p_1}=\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix},\quad \overrightarrow{x_1}=\frac{1}{16}\begin{pmatrix}-5\\6\end{pmatrix}$$

であり，A^{n-1}は

$$n=2m+1:\quad A^{n-1}=A^{2m}=\frac{1}{5^{2m}}E$$

$$n=2m\quad:\quad A^{n-1}=A^{2m-1}=\frac{2}{5^{2m-1}}\begin{pmatrix}1&\frac{3}{4}\\-1&-1\end{pmatrix}$$

となる．ゆえに，p_n，q_n，r_nは奇数番目 $n=2m+1$

$$\begin{pmatrix}p_{2m+1}\\q_{2m+1}\\r_{2m+1}\end{pmatrix}=\frac{1}{16}\begin{pmatrix}5\\10\\1\end{pmatrix}+\frac{1}{16\cdot5^{2m}}\begin{pmatrix}-5\\6\\-1\end{pmatrix}$$

偶数番目 $n=2m$

$$\begin{pmatrix}p_{2m}\\q_{2m}\\r_{2m}\end{pmatrix}=\frac{1}{16}\begin{pmatrix}5\\10\\1\end{pmatrix}+\frac{1}{16\cdot5^{2m-1}}\begin{pmatrix}-1\\-2\\3\end{pmatrix}$$

$n\to\infty$ のとき　$p_n\to p=\frac{5}{16}$，$q_n\to q=\frac{5}{8}$，

$r_n\to r=\frac{1}{16}$ であり，

$p_{2m}=p_{2m+1}=p$，$q_{2m}<q<q_{2m+1}$，$r_{2m}>r>r_{2m+1}$

操作fをn回行ったときのオモテの数をh_nとすると期待値 $E(h_n)=4p_n+2q_n+0r_n$ はnの偶奇に

かかわらず $E(h_n)=\dfrac{5}{2}(1-5^{-n})$ と書ける．

この問題を解くとき，操作 f の2回目から数えた(2回目を1回目とした)ため番号がずれて次の結果を得た．

$$\begin{pmatrix} p_{2m+1} \\ q_{2m+1} \\ r_{2m+1} \end{pmatrix}=\frac{1}{16}\begin{pmatrix} 5 \\ 10 \\ 1 \end{pmatrix}+\frac{1}{16\cdot 5^{2m+1}}\begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} p_{2m} \\ q_{2m} \\ r_{2m} \end{pmatrix}=\frac{1}{16}\begin{pmatrix} 5 \\ 10 \\ 1 \end{pmatrix}+\frac{1}{16\cdot 5^{2m}}\begin{pmatrix} -5 \\ 6 \\ -1 \end{pmatrix}$$

これは $\overrightarrow{p_1}=\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ とするところを $\overrightarrow{p_1}=\dfrac{1}{10}\begin{pmatrix} 3 \\ 6 \end{pmatrix}$ としたからであるが，一般に整関数 $F(n)$ において n が偶数奇数の場合に分けられ

$$F(n)=\begin{cases} F_1(m): n=2m+1 \\ F_2(m): n=2m \end{cases}$$

となっているとき，番号をずらした関数すなわち平行移動した関数を考える．

この場合は $G(n)=F(n-1)$ を求めたいわけである．したがって

$$G(n)=F(n-1)=\begin{cases} F_1(m): n-1=2m+1 \\ F_2(m): n-1=2m \end{cases}$$

となるが $F_1(m): n=2(m+1)$, $F_2(m): n=2m+1$ となり

$$G(n)=\begin{cases} F_2(m) \quad : n=2m+1 \\ F_1(m-1): n=2m \end{cases}$$

が成り立つ．関数 $F(n)$ を上の関数に適応すれば1回目から数えた式が得られる．

$$F(n)=\begin{cases} F_1(m): n=2m-1 \\ F_2(m): n=2m \end{cases}$$

のとき，奇数番ずらしたときと偶数番ずらしたときは次のようになる．

$$G(n)=F(n+2k+1)=\begin{cases} F_1(m+k) \quad : n=2m-1 \\ F_2(m+k+1): n=2m \end{cases}$$

$$G(n)=F(n+2k)=\begin{cases} F_1(m+k): n=2m-1 \\ F_2(m+k): n=2m \end{cases}$$

硬貨の裏返しの問題に戻って，1枚だけ裏返す操作を f とした場合を考える．最初全ての硬貨をウラにしておくと，オモテの数は奇数回の操作 f では奇数，偶数回の操作 f では偶数となり，硬貨の数が N 枚とすれば操作 f の回数が $n=N-1$ 回以降は N までの数の偶数奇数の場合が交互に現れる．オモテの数が k から $k-1$ になる確率は $\dfrac{k}{N}$ であり，オモテの数が k から $k+1$ になる確率は $\dfrac{N-k}{N}$ である．

例えば硬貨 $N=4$ 枚の1つを無作為に選び，裏返す操作を f とし，最初全てウラにしてあったとすると，奇数 $n=2m-1$ 回目の部分列でオモテの枚数が3，1である確率をそれぞれ s_m, t_m とすれば

$$s_m=\frac{1}{2}-\frac{2}{4^m},\quad t_m=\frac{1}{2}+\frac{2}{4^m}$$

である．偶数 $n=2m$ 回目の部分列でオモテの枚数が4, 2, 0である確率を p_m, q_m, r_m とすれば

$$p_m=\frac{1}{8}-2^{3-2m},\quad q_m=\frac{3}{4},\quad r_m=\frac{1}{8}+2^{3-2m}$$

である．オモテの枚数の期待値は2に近づく．

硬貨 $N=5$ 枚を最初は全てをウラにして次々と1枚だけ裏返す操作を f とするとき，$n=2m$ 回目は偶数枚がオモテとなるが，オモテの数が4, 2, 0である確率をそれぞれ p_m, q_m, r_m とすれば

$$p_{m+1}=\frac{13}{25}p_m+\frac{6}{25}q_m,\quad q_{m+1}=\frac{12}{25}p_m+\frac{17}{25}q_m+\frac{20}{25}r_m,$$

$$r_{m+1}=\frac{2}{25}q_m+\frac{1}{5}r_m$$

である．$p_m+q_m+r_m=1$ であるから

$$\overrightarrow{p_m}=\begin{pmatrix} p_m \\ q_m \end{pmatrix},\ \overrightarrow{p_1}=\begin{pmatrix} 0 \\ \frac{4}{5} \end{pmatrix},\ A=\frac{1}{25}\begin{pmatrix} 13 & 6 \\ -8 & -3 \end{pmatrix}$$

として，$\overrightarrow{p_{m+1}}=\overrightarrow{p_1}+A\overrightarrow{p_m}$ となる．$\vec{x}=\overrightarrow{p_1}+A\vec{x}$ となる $\vec{x}$ を用いて

$$\overrightarrow{p_m}-\vec{x}=A^{m-1}(\overrightarrow{p_1}-\vec{x})$$

となる．ここで $m\to\infty$ のとき $A^m\to O$ となる．このことは

$$A^2=\frac{1}{25^2}\begin{pmatrix} 121 & 60 \\ -80 & -39 \end{pmatrix}$$

であり A^2 と A の各要素の絶対値を比較すればよい．したがって $\overrightarrow{p_m}$ の極限値が存在して，それは $\vec{x}$ である．$\vec{x}=\dfrac{5}{16}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ より，$m\to\infty$ のとき $p_m\to\dfrac{5}{16}$,

$q_m\to\dfrac{5}{8}$, $r_m\to\dfrac{1}{16}$

2枚を選んで裏返すときの m 回目の確率とこの場合の2 m 回目の確率は一致しないが，極限値は一致している．

(東京都立新宿高等学校)