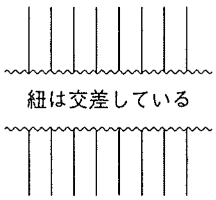
自然数 N の和表示について

結川(ゆいかわ)　義明(よしあき)

以前，確率の授業で次のような問題を扱った．



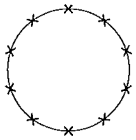
右のような8本の紐がある．2本ずつ結び2人で互いに4個の結び目を作る．このとき，8本の紐が全てつながり1つの大きな輪ができたとき，2人は相性がいいという占いがある．1つの大きい輪はどのくらいの確率でできるのだろうか．

結果は表の通りである．

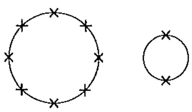
8本の紐でできる1つの大きな輪	$\frac{48}{105} \fallingdotseq 0.4571428$
6本の紐と2本の紐でできる2つの輪	$\frac{32}{105} \fallingdotseq 0.3047619$
4本の紐でできる2つの輪	$\frac{12}{105} \fallingdotseq 0.1142857$
4本の紐と2本の紐でできる3つの輪	$\frac{12}{105} \fallingdotseq 0.1142857$
2本の紐でできる4つの輪	$\frac{1}{105} \fallingdotseq 0.0095238$

相性がいいとされる1つの大きな輪ができる確率が一番大きいのである(これには生徒も驚いていた)．さて，新たに2本加え，10本の紐で同様なことをすると何種類の輪ができるだろうか．答は下に示したように全部で7種類の輪ができる．

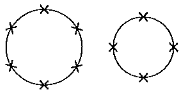
・10本の紐でできる1つの大きな輪



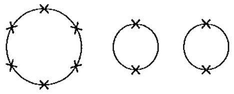
・8本の紐と2本の紐でできる2つの輪



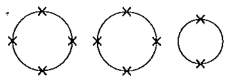
・6本の紐と4本の紐でできる2つの輪



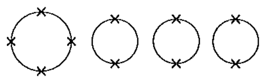
・6本の紐と2本の紐でできる3つの輪



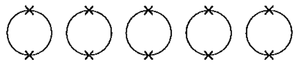
・4本の紐と2本の紐でできる3つの輪



・4本の紐と2本の紐でできる4つの輪



・2本の紐でできる5つの輪



問題 1

$2N$本の紐で同様なことをした場合，何種類の輪ができるだろうか．(ただし，$N=1, 2, 3, \cdots\cdots$)

この問題1は2本の紐でできる輪を1，4本の紐でできる輪を2と考えると，次の問題2に帰着できる．

問題 2

自然数 N を N より小さい自然数(1，2，……，$N-1$) の和で表示する方法は何通りあるだろうか．

注：ここでは，この表示の仕方を<u>自然数の和表示</u>と呼び，自然数 N の和表示の総数を S_N とする．

(例) $N=7$ の場合，下に示したように全部で14通りあるから，$S_7=14$ である．

$7=1+6$	$7=1+1+1+4$
$7=2+3$	$7=1+1+2+3$
$7=3+4$	$7=1+2+2+2$
$7=1+1+5$	$7=1+1+1+1+3$
$7=1+2+4$	$7=1+1+1+2+2$
$7=1+3+3$	$7=1+1+1+1+1+2$
$7=2+2+3$	$7=1+1+1+1+1+1+1$

次に，S_N を求めることにする．これは次のような方針で考えていく．

1. 自然数 N を n 個の自然数で表示する総数を a_n($n=2, 3, 4, \cdots\cdots, N$) とし，まず a_n を求める．
2. $b_n=a_2+a_3+\cdots\cdots+a_n$ と定義し，b_n を求める．

注：$n=N$ のとき，定義より，$b_N=S_N$ となる．

1．a_nを求める．($n=2,3,4,\cdots\cdots,\ N$)

(1) $n=2$ のとき，$a_2=\left[\dfrac{N}{2}\right]$ $(N\geqq 2)$

注：記号［ ］はガウス記号を表す．

(2) $n=3$ のとき，

・3 個の自然数の中に 1 を 1 つ以上含む和表示は自然数$(N-1)$の 2個の自然数の和表示と考えられるから $\left[\dfrac{N-1}{2}\right]$

・3 個の自然数の中に 2 を 1 つ以上含む，2 以上の自然数でできる和表示は自然数 $(N-2)$の 2 個の自然数の和表示から，1 を含む和表示を引いたものと考えられるから

$$\left[\frac{N-2}{2}\right]-1=\left[\frac{N-4}{2}\right]$$

($\because$ n：整数 $\Rightarrow$ $[x]+n=[x+n]$)

・3 個の自然数の中に 3 を 1 つ以上含む，3 以上の自然数でできる和表示は自然数 $(N-3)$の 2 個の自然数の和表示から，1 または 2 を含む和表示を引いたものと考えられるから

$$\left[\frac{N-3}{2}\right]-2=\left[\frac{N-7}{2}\right]$$

$$\vdots$$

したがって，3 個の自然数の和表示 a_3 は

$$a_3=\sum_{k=0}^{\left[\frac{N}{3}-1\right]}\left[\frac{N-(3k+1)}{2}\right]\qquad(N\geqq 3)$$

$\left(\because\ \dfrac{N-(3k+1)}{2}\geqq 1\right.$ より $k\leqq\dfrac{N}{3}-1$

k は 0 以上の整数より $\left.0\leqq k\leqq\left[\dfrac{N}{3}-1\right]\right)$

(3) $n=4$ のとき，

・4 個の自然数の中に 1 を 1 つ以上含む自然数の和表示は，自然数$(N-1)$ の 3 個の自然数の和表示と考えられるから

$$\sum_{k=0}^{\left[\frac{N-1}{3}-1\right]}\left[\frac{(N-1)-(3k+1)}{2}\right]$$

・4 個の自然数の中に 2 を 1 つ以上含む，2 以上の自然数でできる和表示は，自然数$(N-2)$ の 3 個の自然数の和表示から，1 を含む和表示すなわち，

$$\left[\frac{(N-2)-1}{2}\right]$$

を引いたものと考えられるから

$$\sum_{k=0}^{\left[\frac{N-2}{3}-1\right]}\left[\frac{(N-2)-(3k+1)}{2}\right]-\left[\frac{(N-2)-1}{2}\right]$$

・4 個の自然数の中に 3 を 1 つ以上含む，3 以上の自然数でできる和表示は，自然数$(N-3)$ の 3 個の自然数の和表示から，1 または 2 を含む和表示すなわち，$\left\{\left[\dfrac{(N-3)-1}{2}\right]+\left[\dfrac{(N-3)-2}{2}\right]-1\right\}$

を引いたものと考えられるから

$$\sum_{k=0}^{\left[\frac{N-3}{2}-1\right]}\left[\frac{(N-3)-(3k+1)}{2}\right]-\left\{\left[\frac{(N-3)-1}{2}\right]+\left[\frac{(N-3)-2}{2}\right]-1\right\}$$

$$=\sum_{k=0}^{\left[\frac{N-3}{2}-1\right]}\left[\frac{(N-3)-(3k+1)}{2}\right]-\left\{\left[\frac{(N-3)-1}{2}\right]+\left[\frac{(N-3)-4}{2}\right]\right\}$$

$$\vdots$$

したがって，4 個の自然数の和表示 a_4 は

$$a_4=\sum_{m=3}^{N-1}\left\{\sum_{k=0}^{\left[\frac{m}{3}-1\right]}\left[\frac{m-(3k+1)}{2}\right]-\sum_{k=0}^{N-2-m}\left[\frac{m-(3k+1)}{2}\right]\right\}$$

$$=\sum_{m=3}^{N-1}\sum_{k=N-1-m}^{\left[\frac{m}{3}-1\right]}\left[\frac{m-(3k+1)}{2}\right]$$

ただし，$t_1>t_2$ のとき $\displaystyle\sum_{k=t_1}^{t_2}\left[\frac{m-(3k+1)}{2}\right]=0$ とする．

(4) $n=5$ のとき，$n=4$ と同様に考えると

$$a_5=\sum_{P_1=1}^{\left[\frac{N-3}{2}\right]}\sum_{m=3}^{N-2P_1}\left\{\sum_{k=0}^{\left[\frac{m}{3}-1\right]}\left[\frac{m-(3k+1)}{2}\right]-\sum_{k=0}^{N-P_1-2-m}\left[\frac{m-(3k+1)}{2}\right]\right\}$$

$$=\sum_{P_1=1}^{\left[\frac{N-3}{2}\right]}\sum_{m=3}^{N-2P_1}\sum_{k=N-P_1-1-m}^{\left[\frac{m}{3}-1\right]}\left[\frac{m-(3k+1)}{2}\right]\ (N\geqq 5)$$

一般に，$n\geqq 6$ のとき，次の式が成り立つ．

$$a_n=\sum_{P_{n-4}=1}^{\left[\frac{N-3}{n-3}\right]}\ \sum_{P_{n-5}=0}^{\left[\frac{N-(n-3)P_{n-4}-3}{n-4}\right]}\cdots\cdots\sum_{P_1=0}^{\left[\frac{N-g_2(n-4)-3}{2}\right]}\ \sum_{m=3}^{N-g_1(n-4)}\ \sum_{k=N-f_1(n-4)-1-m}^{\left[\frac{m}{3}-1\right]}\left[\frac{m-(3k+1)}{2}\right]$$

$$=\sum_{P_{n-4}=1}^{\left[\frac{N-3}{n-3}\right]}\ \sum_{P_j=0}^{\left[\frac{N-g_{j+1}(n-4)-3}{j+1}\right]}\ \sum_{m=3}^{N-g_1(n-4)}\ \sum_{k=N-f_1(n-4)-1-m}^{\left[\frac{m}{3}-1\right]}\left[\frac{m-(3k+1)}{2}\right]$$

ただし， $n=6,7,8,\cdots\cdots,\ N$

$j=1,2,3,\cdots\cdots,\ n-5$

$g_m(n)=\sum_{i=m}^{n}(i+1)P_i$，$f_m(n)=\sum_{i=m}^{n}iP_i$ とする．

また，$t_1>t_2$ のとき

$\sum_{k=t_1}^{t_2}\left[\frac{m-(3k+1)}{2}\right]=0$ とする

〔証〕(1) $n=6$ については省略

(2) $n=l$ のとき成り立つと仮定する．

すなわち，

$$a_l=\sum_{P_{l-4}=1}^{\left[\frac{N-3}{l-3}\right]}\ \sum_{P_j=0}^{\left[\frac{N-g_{j+1}(l-4)-3}{j+1}\right]}\ \sum_{m=3}^{N-g_1(l-4)}\ \sum_{k=N-f_1(l-4)-1-m}^{\left[\frac{m}{3}-1\right]}\left[\frac{m-(3k+1)}{2}\right]$$

次に，$n=4$ のときと同様に，a_{l+1} を考える．

・$(l+1)$ 個の自然数の中に1を1つ以上含む自然数の和表示は，自然数 $(N-1)$ の l 個の自然数の和表示と考えられるから

$$\sum_{P_{l-4}=1}^{\left[\frac{N-4}{l-3}\right]}\ \sum_{P_j=0}^{\left[\frac{N-g_{j+1}(l-4)-4}{j+1}\right]}\ \sum_{m=3}^{N-g_1(l-4)-1}\ \sum_{k=N-f_1(l-4)-2-m}^{\left[\frac{m}{3}-1\right]}\left[\frac{m-(3k+1)}{2}\right]$$

・$(l+1)$ 個の自然数の中に2を1つ以上含む，2以上の自然数でできる和表示は

$$\sum_{P_{l-4}=1}^{\left[\frac{N-(l+2)}{l-3}\right]}\ \sum_{P_j=0}^{\left[\frac{N-g_{j+1}(l-4)-(l+2)}{j+1}\right]}\ \sum_{m=3}^{N-g_1(l-4)-(l-1)}\ \sum_{k=N-f_1(l-4)-(l-1)-m}^{\left[\frac{m}{3}-1\right]}\left[\frac{m-(3k+1)}{2}\right]$$

・$(l+1)$ 個の自然数の中に3を1つ以上含む，3以上の自然数でできる和表示は

$$\sum_{P_{l-4}=1}^{\left[\frac{N-2l}{l-3}\right]}\ \sum_{P_j=0}^{\left[\frac{N-g_{j+1}(l-4)-2l}{j+1}\right]}\ \sum_{m=3}^{N-g_1(l-4)-(2l-3)}\ \sum_{k=N-f_1(l-4)-(2l-4)-m}^{\left[\frac{m}{3}-1\right]}\left[\frac{m-(3k+1)}{2}\right]$$

$$\vdots$$

したがって，$(l+1)$ 個の自然数の和表示 a_{l+1} は

$$a_{l+1}=\sum_{s=1}^{\left[\frac{N-3}{l-2}\right]}\ \sum_{P_{l-4}=1}^{\left[\frac{N-\{4+(s-1)(l-2)\}}{l-3}\right]}\ \sum_{P_j=0}^{\left[\frac{N-g_{j+1}(l-4)-\{4+(s-1)(l-2)\}}{j+1}\right]}\ \sum_{m=3}^{N-g_1(l-4)-\{1+(s-1)(l-2)\}}\ \sum_{k=N-f_1(l-4)-\{2+(s-1)(l-3)\}-m}^{\left[\frac{m}{3}-1\right]}\left[\frac{m-(3k+1)}{2}\right]$$

$(j=1,2,3,\cdots\cdots,\ l-5)$

ここで，$P_{l-4}-1=P'_{l-4}$ とおくと，

$$a_{l+1}=\sum_{s=1}^{\left[\frac{N-3}{l-2}\right]}\ \sum_{P'_{l-4}=0}^{\left[\frac{N-(l-2)s-3}{l-3}\right]}\ \sum_{P_j=0}^{\left[\frac{N-g_{j+1}(l-5)-(l-3)P'_{l-4}-3}{j+1}\right]}\ \sum_{m=3}^{N-g_1(l-5)-(l-3)P'_{l-4}-(l-2)s}\ \sum_{k=N-f_1(l-5)-(l-4)P'_{l-4}-(l-3)s-1-m}^{\left[\frac{m}{3}-1\right]}\left[\frac{m-(3k+1)}{2}\right]$$

更に，$S=P_{l-3}$，$P'_{l-4}=P_{l-4}$ とおくと，

$$a_{l+1}=\sum_{P_{l-3}=1}^{\left[\frac{N-3}{l-2}\right]}\ \sum_{P_{l-4}=0}^{\left[\frac{N-(l-2)P_{l-3}-3}{l-3}\right]}\ \sum_{P_j=0}^{\left[\frac{N-g_{j+1}(l-4)-3}{j+1}\right]}\ \sum_{m=3}^{N-g_1(l-3)}\ \sum_{k=N-f_1(l-3)-1-m}^{\left[\frac{m}{3}-1\right]}\left[\frac{m-(3k+1)}{2}\right]$$

$$=\sum_{P_{l-3}=1}^{\left[\frac{N-3}{l-2}\right]}\ \sum_{P_j=0}^{\left[\frac{N-g_{j+1}(l-3)-3}{j+1}\right]}\ \sum_{m=3}^{N-g_1(l-3)}\ \sum_{k=N-f_1(l-3)-1-m}^{\left[\frac{m}{3}-1\right]}\left[\frac{m-(3k+1)}{2}\right]$$

$(j=1,2,3,\cdots\cdots,\ l-4)$

$(\because\ \ N-g_{j+1}(l-5)-(l-3)P'_{l-4}-3$

$=N-\sum_{i=j+1}^{l-5}(i+1)P_i-(l-3)P_{l-4}-3$

$=N-\sum_{i=j+1}^{l-4}(i+1)P_i-3$

$=N-g_{j+1}(l-4)-3$

同様に，

$N-g_1(l-5)-(l-3)P'_{l-4}-(l-2)S$

$=N-g_1(l-3)$

$N-f_1(l-5)-(l-4)P'_{l-4}-(l-3)S$

$=N-f_1(l-3))$

よって，$n=l+1$ についても成り立つ．

したがって，$n\geqq6$ のすべての自然数について成り立つ．

(証明終)

2．b_nを求める．($n=2,\ 3,\ 4,\ \cdots\cdots,\ N$)

1より

$$b_2=a_2=\left[\frac{N}{2}\right],$$

$$b_3=a_2+a_3=\left[\frac{N}{2}\right]+\sum_{k=0}^{\left[\frac{N}{3}-1\right]}\left[\frac{N-(3k+1)}{2}\right],$$

$$b_4=b_3+a_4=\left[\frac{N}{2}\right]+\sum_{k=0}^{\left[\frac{N}{3}-1\right]}\left[\frac{N-(3k+1)}{2}\right]$$

$$+\sum_{m=3}^{N-1}\sum_{k=N-1-m}^{\left[\frac{m}{3}-1\right]}\left[\frac{m-(3k+1)}{2}\right]$$

$$=\left[\frac{N}{2}\right]+\sum_{m=3}^{N}\sum_{k=N-1-m}^{\left[\frac{m}{3}-1\right]}\left[\frac{m-(3k+1)}{2}\right]$$

$$b_5=b_4+a_5=\left[\frac{N}{2}\right]+\sum_{m=3}^{N}\sum_{k=N-1-m}^{\left[\frac{m}{3}-1\right]}\left[\frac{m-(3k+1)}{2}\right]$$

$$+\sum_{P_1=1}^{\left[\frac{N-3}{2}\right]}\sum_{m=3}^{N-2P_1}\sum_{k=N-P_1-1-m}^{\left[\frac{m}{3}-1\right]}\left[\frac{m-(3k+1)}{2}\right]$$

$$=\left[\frac{N}{2}\right]+\sum_{P_1=0}^{\left[\frac{N-3}{2}\right]}\sum_{m=3}^{N-2P_1}\left\{\sum_{k=0}^{\left[\frac{m}{3}-1\right]}\left[\frac{m-(3k+1)}{2}\right]-\sum_{k=0}^{N-P_1-2-m}\left[\frac{m-(3k+1)}{2}\right]\right\}$$

ただし，$t_1>t_2$のとき $\sum_{k=t_1}^{t_2}\left[\frac{m-(3k+1)}{2}\right]=0$ とする．

一般に，$n\geqq 6$ のとき，次の式が成り立つ．

$$b_n=\left[\frac{N}{2}\right]+\sum_{P_{n-4}=0}^{\left[\frac{N-3}{n-3}\right]}\sum_{P_{n-5}=0}^{\left[\frac{N-(n-3)P_{n-4}-3}{n-4}\right]}\cdots\cdots\sum_{P_1=0}^{\left[\frac{N-g_2(n-4)-3}{2}\right]}$$

$$\sum_{m=3}^{N-g_1(n-4)}\sum_{k=N-f_1(n-4)-1-m}^{\left[\frac{m}{3}-1\right]}\left[\frac{m-(3k+1)}{2}\right]$$

$$=\left[\frac{N}{2}\right]+\sum_{P_{n-4}=0}^{\left[\frac{N-3}{n-3}\right]}\sum_{P_j=0}^{\left[\frac{N-g_{j+1}(n-4)-3}{j+1}\right]}\sum_{m=3}^{N-g_1(n-4)}$$

$$\sum_{k=N-f_1(n-4)-1-m}^{\left[\frac{m}{3}-1\right]}\left[\frac{m-(3k+1)}{2}\right]$$

ただし，　$n=6,7,8,\cdots\cdots,\ N$

$j=1,2,3,\cdots\cdots,\ n-5$

$g_m(n)=\sum_{i=m}^{n}(i+1)P_i,\ \ f_m(n)=\sum_{i=m}^{n}iP_i$ とする．

また，$t_1>t_2$ のとき

$$\sum_{k=t_1}^{t_2}\left[\frac{m-(3k+1)}{2}\right]=0 \text{ とする}$$

〔証〕(1) $n=6$ については省略

(2) $n=l$ のとき成り立つと仮定する．

すなわち，

$$b_l=\left[\frac{N}{2}\right]+\sum_{P_{l-4}=0}^{\left[\frac{N-3}{l-3}\right]}\sum_{P_j=0}^{\left[\frac{N-g_{j+1}(l-4)-3}{j+1}\right]}\sum_{m=3}^{N-g_1(l-4)}$$

$$\sum_{k=N-f_1(l-4)-1-m}^{\left[\frac{m}{3}-1\right]}\left[\frac{m-(3k+1)}{2}\right]$$

$(j=1,2,3,\cdots\cdots,\ l-5)$

ここで，$b_{l+1}=b_l+a_{l+1}$ より

$$b_{l+1}=\left[\frac{N}{2}\right]+\sum_{P_{l-4}=0}^{\left[\frac{N-3}{l-3}\right]}\sum_{P_j=0}^{\left[\frac{N-g_{j+1}(l-4)-3}{j+1}\right]}\sum_{m=3}^{N-g_1(l-4)}$$

$$\sum_{k=N-f_1(l-4)-1-m}^{\left[\frac{m}{3}-1\right]}\left[\frac{m-(3k+1)}{2}\right]$$

$$+\sum_{P_{l-3}=1}^{\left[\frac{N-3}{l-2}\right]}\sum_{P_j=0}^{\left[\frac{N-g_{j+1}(l-3)-3}{j+1}\right]}\sum_{m=3}^{N-g_1(l-3)}$$

$$\sum_{k=N-f_1(l-3)-1-m}^{\left[\frac{m}{3}-1\right]}\left[\frac{m-(3k+1)}{2}\right]$$

$$=\left[\frac{N}{2}\right]+\sum_{P_{l-3}=0}^{\left[\frac{N-3}{l-2}\right]}\sum_{P_j=0}^{\left[\frac{N-g_{j+1}(l-3)-3}{j+1}\right]}\sum_{m=3}^{N-g_1(l-3)}$$

$$\sum_{k=N-f_1(l-3)-1-m}^{\left[\frac{m}{3}-1\right]}\left[\frac{m-(3k+1)}{2}\right]$$

$(j=1,2,3,\cdots\cdots,\ l-4)$

よって，$n=l+1$ についても成り立つ．

したがって，$n\geqq 6$のすべての自然数について成り立つ．（証明終）

よって，b_nの定義より，$n=N$のとき，$b_N=S_N$となるから，〈問題2の答〉は次のようになる．

〈問題2の答〉

(i) $N=2$のとき，$S_2=b_2=a_2=\left[\frac{2}{2}\right]=1$

(ii) $N=3$のとき，

$$S_3=b_3=\left[\frac{3}{2}\right]+\sum_{k=0}^{\left[\frac{3}{3}-1\right]}\left[\frac{3-(3k+1)}{2}\right]=2$$

(iii) $N=4$のとき，

$$S_4=b_4=\left[\frac{4}{2}\right]+\sum_{m=3}^{4}\sum_{k=3-m}^{\left[\frac{m}{3}-1\right]}\left[\frac{m-(3k+1)}{2}\right]$$

$=4$

(iv) $N=5$ のとき

$$S_5=b_5=\left[\frac{5}{2}\right]+\sum_{P_1=0}^{1}\sum_{m=3}^{5-2P_1}\sum_{k=4-P_1-m}^{\left[\frac{m}{3}-1\right]}\left[\frac{m-(3k+1)}{2}\right]$$

$=6$

（v） $N \geqq 6$ のとき

$$S_N = b_N$$

$$= \left[\frac{N}{2}\right] + \sum_{P_{N-4}=0}^{1} \sum_{P_j=0}^{\left[\frac{N-g_{j+1}(N-4)-3}{j+1}\right]} \sum_{m=3}^{N-g_1(N-4)} \sum_{k=N-f_1(N-4)-1-m}^{\left[\frac{m}{3}-1\right]} \left[\frac{m-(3k+1)}{2}\right]$$

ただし，$j=1, 2, 3, \cdots\cdots, N-5$

$g_m(n) = \sum_{i=m}^{n} (i+1) P_i$，$f_m(n) = \sum_{i=m}^{n} i P_i$ とする.

$t_1 > t_2$ のとき $\sum_{k=t_1}^{t_2} \left[\frac{m-(3k+1)}{2}\right] = 0$ とする.

また，$k<0$ のとき $\left[\frac{m-(3k+1)}{2}\right] = 0$ とする.

さて，〈問題１の答〉であるが，これは自然数 N を N 自身で表示する方法（１通り）と，N より小さい自然数（$1, 2, 3, \cdots\cdots, N-1$）の和で表示する総数 S_N の和，すなわち S_N+1 と同値と考えられるから，〈問題２の答〉に１を加えればよいことになる.

（埼玉県立志木高等学校）