三角関数の公式の練習問題における工夫

中原(なかはら)　克芳(かつよし)

三角関数では数多くの公式が現れる．その練習問題の多くは公式に単に数値を代入するだけで答が出るが，その答が簡単な数値にならず，面白味に欠ける．少し工夫して答が簡単になるような問題にすれば，生徒も問題を解いた気分になり，すっきりとするのではないか．そう考えている教師も少なくないと思う．

そこで三角関数の公式を使う練習問題で，答が簡単な数値になるよう工夫してみた．この稿ではそれを紹介したい．

Ⅰ］半角の公式

半角の公式は公式自体に2乗が付いているので，具体的な問題では平方根を取る必要があるが，$\cos\theta$ の値によっては2重根号が残り，すっきりしないことこの上ない．$\cos\theta$ の値が有理数であればこの問題は解消されるが，それでは2重根号そのものも現れず，単純過ぎて毎回使う気にはならない．そこで $\cos\theta$ が無理数のとき，2重根号がはずせるための条件を考えてみた．

半角の公式より

$$\cos^2\frac{\theta}{2}=\frac{1+\cos\theta}{2}$$

$$=\frac{1\pm\sqrt{1-\sin^2\theta}}{2}$$

$$=\frac{1\pm\sqrt{(1+\sin\theta)(1-\sin\theta)}}{2}$$

$$\therefore\ \cos\frac{\theta}{2}=\pm\sqrt{\frac{1\pm\sqrt{(1+\sin\theta)(1-\sin\theta)}}{2}}$$

$$=\pm\frac{\sqrt{2\pm2\sqrt{(1+\sin\theta)(1-\sin\theta)}}}{2}$$

ここで $(1+\sin\theta)+(1-\sin\theta)=2$ に注意すると，

$$\cos\frac{\theta}{2}=\pm\frac{\sqrt{1+\sin\theta}\pm\sqrt{1-\sin\theta}}{2}$$

のように変形できる．したがって，$\sin\theta\in\mathrm{Q}$ であれば，2次無理数の和（$\sqrt{n}+\sqrt{m}$, n, $m\in\mathrm{Q}$）の形に $\cos\dfrac{\theta}{2}$ の2重根号をはずすことができる．$\sin\dfrac{\theta}{2}$ についても同様である．

定理． $\sin\theta\in\mathrm{Q}$ ならば，半角の公式において，2次無理数として，2重根号をはずすことができる．

例1．$\sin\theta=\dfrac{1}{3}$，$0^\circ<\theta<90^\circ$ のとき，

$\cos\theta=\dfrac{2\sqrt{2}}{3}$ だから，$\cos^2\dfrac{\theta}{2}=\dfrac{1+\frac{2\sqrt{2}}{3}}{2}$

$$\therefore\ \cos\frac{\theta}{2}=\sqrt{\frac{3+2\sqrt{2}}{6}}=\frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{6}}=\frac{2\sqrt{3}+\sqrt{6}}{6}$$

この定理は非常に簡明な形であるが，あまり知られていないようである．筆者も自分で見つけたあと，何人かに聞いてみて，ようやく1人から，角の2等分の問題と関係があることを教えていただいた．

Ⅱ］加法定理

加法定理の練習問題として，数研558「新編」数学Ⅱ教科書（p.72）では，

「$0^\circ<\alpha<90^\circ$，$0^\circ<\beta<90^\circ$ で，$\sin\alpha=\dfrac{3}{5}$，$\cos\beta=\dfrac{1}{2}$ のとき，$\sin(\alpha+\beta)$ の値を求めよ．」

とある．これは $\cos\alpha=\dfrac{4}{5}$，$\sin\beta=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ を求めて加法定理の公式に代入すれば，

$$\sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta$$

$$=\frac{3}{5}\cdot\frac{1}{2}+\frac{4}{5}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{3+4\sqrt{3}}{10}$$

のように答が得られる．しかしこの結果は単に公式に数値を代入しただけであり，また答も2項のままで終わっているので，生徒の方も問題を解いた気にならないだろう．その点，数研557数学Ⅱ教科書（p.75）の例題は

「$0^\circ<\alpha<90^\circ$，$0^\circ<\beta<90^\circ$ で，$\sin\alpha=\dfrac{3}{5}$，$\sin\beta=\dfrac{12}{13}$ のとき，$\sin(\alpha+\beta)$ の値を求めよ．」で，答が単項(有理数)になる．しかし，このPythagoras数を用いたものは，分母が大きくなるため問題が限られてくる．というより，ほとんどこの2数しか出題できない．

教師の側からすると，加法定理を用いたあとに，せめて答が単項になるようにして，すっきりとさせたいものである(その方が採点も楽？)．そのようなことを考えていると，別に $\sin\alpha$ や $\cos\beta$ 等の値がすべて有理数にならなくても，それらの根号内の数が一致すれば単項になることに気付いた．そこで分母が小さい自然数のときの三角関数の表を作り，そのような数の組を調べた所，

$$(\cos\alpha, \sin\alpha\,;\cos\beta, \sin\beta)$$
$$=\left(\frac{2}{3},\frac{\sqrt{5}}{3};\frac{2}{7},\frac{3\sqrt{5}}{7}\right),\left(\frac{\sqrt{2}}{3},\frac{\sqrt{7}}{3};\frac{\sqrt{7}}{5},\frac{3\sqrt{2}}{5}\right)$$

等が見つかった．

例2．$0^\circ<\alpha<90^\circ$，$0^\circ<\beta<90^\circ$ で，

$\cos\alpha=\dfrac{2}{3}$，$\sin\beta=\dfrac{2}{7}$ のとき，

$\sin\alpha=\dfrac{\sqrt{5}}{3}$，$\cos\beta=\dfrac{3\sqrt{5}}{7}$ だから

$$\cos(\alpha+\beta)=\frac{2}{3}\cdot\frac{3\sqrt{5}}{7}-\frac{\sqrt{5}}{3}\cdot\frac{2}{7}=\frac{4\sqrt{5}}{21},$$

$$\sin(\alpha+\beta)=\frac{\sqrt{5}}{3}\cdot\frac{3\sqrt{5}}{7}+\frac{2}{3}\cdot\frac{2}{7}=\frac{19}{21}$$

ここでこれらの値の cos, sin を入れ換えることもできる．また例のように cos, sin の加法定理のどちらにも利用できる所も便利がよい．

※ この表は末尾に載せておく．その見方は，根号内の数が上下とも一致するような組を探せばよい．

求める組は先に上げた組以外にもかなり多くあるので，各自で探していただきたい．

さて，根号内が一致する2数の組を得るために，表に頼らない方法も考えてみたが，これはどうも筆者の手に余った．しかしこの話を熊野充博先生(広島県立福山工業高等学校)にしたところ，2次曲線の有理点を求める方法を使って，一方が有理数になるときの組についての一般形を求められた．
それを紹介しよう．

求める数の組の一方が有理数であるとき，$a\in\mathrm{N}$ を固定してその解を $(x, y\sqrt{a})$ $(x, y\in\mathrm{Q})$ と表せば，(x, y) は不定方程式 $x^2+ay^2=1$ の有理数解と考えることができる．この方程式は自明な解 $(-1, 0)$ をもつので，$y=t(x+1)$ とおいて先の式に代入し，x, y を t で表せば，

$$(x, y)=\left(\frac{1-at^2}{1+at^2},\frac{2t}{1+at^2}\right)$$

または $t=\dfrac{m}{n}$ $(m, n\in\mathrm{N})$ とおき換えて，

$$(x, y)=\left(\frac{n^2-am^2}{n^2+am^2},\frac{2mn}{n^2+am^2}\right)$$

を得る．

この式において，$a=5$，$(m,n)=(1,1),(1,3)$ としたのが先の例2.になる．

一般の場合には，その解を $(x\sqrt{a}, y\sqrt{b})$ $(a, b\in\mathrm{N}, x, y\in\mathrm{Q})$ と表せば，(x, y) は不定方程式 $ax^2+by^2=1$ の有理数解となるが，これは a, b が特殊な場合にしか一般解が得られそうにない．これについても熊野先生はパソコンを用いていくつかの組を求めた．当然ではあるが，高校生相手に出題できそうな分母の値が小さいものは，先の表に含まれていた．

結局，不定方程式 $ax^2+by^2=1$ $(a, b\in\mathrm{N})$ の一般解を得る公式については未解決である．また先の表は，他にも使い道がありそうである．これらの2点について知っていたり，新たに発見された方がおられれば，ぜひ教えていただきたい．

この稿の内容はどちらも実用的であると思うので，興味を持たれた方は早速明日の小テストにでも使って下されば幸いである．

参考文献
拙稿「三角関数と二重根号」初等数学　第29号

分母が簡単な cosθ，sinθの値

1	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{\sqrt{2}}{3}$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{\sqrt{2}}{4}$	$\frac{\sqrt{3}}{4}$	$\frac{\sqrt{5}}{4}$	$\frac{\sqrt{6}}{4}$	$\frac{\sqrt{7}}{4}$
0	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{2\sqrt{2}}{3}$	$\frac{\sqrt{7}}{3}$	$\frac{\sqrt{6}}{3}$	$\frac{\sqrt{5}}{3}$	$\frac{\sqrt{15}}{4}$	$\frac{\sqrt{14}}{4}$	$\frac{\sqrt{13}}{4}$	$\frac{\sqrt{11}}{4}$	$\frac{\sqrt{10}}{4}$	$\frac{3}{4}$

$\frac{1}{5}$	$\frac{\sqrt{2}}{5}$	$\frac{\sqrt{3}}{5}$	$\frac{2}{5}$	$\frac{\sqrt{5}}{5}$	$\frac{\sqrt{6}}{5}$	$\frac{\sqrt{7}}{5}$	$\frac{2\sqrt{2}}{5}$	$\frac{3}{5}$	$\frac{\sqrt{10}}{5}$	$\frac{\sqrt{11}}{5}$	$\frac{2\sqrt{3}}{5}$
$\frac{2\sqrt{6}}{5}$	$\frac{\sqrt{23}}{5}$	$\frac{\sqrt{22}}{5}$	$\frac{\sqrt{21}}{5}$	$\frac{2\sqrt{5}}{5}$	$\frac{\sqrt{19}}{5}$	$\frac{3\sqrt{2}}{5}$	$\frac{\sqrt{17}}{5}$	$\frac{4}{5}$	$\frac{\sqrt{15}}{5}$	$\frac{\sqrt{14}}{5}$	$\frac{\sqrt{13}}{5}$

$\frac{1}{6}$	$\frac{\sqrt{2}}{6}$	$\frac{\sqrt{3}}{6}$	$\frac{\sqrt{5}}{6}$	$\frac{\sqrt{6}}{6}$	$\frac{\sqrt{7}}{6}$	$\frac{\sqrt{10}}{6}$	$\frac{\sqrt{11}}{6}$	$\frac{\sqrt{13}}{6}$	$\frac{\sqrt{14}}{6}$	$\frac{\sqrt{15}}{6}$	$\frac{\sqrt{17}}{6}$
$\frac{\sqrt{35}}{6}$	$\frac{\sqrt{34}}{6}$	$\frac{\sqrt{33}}{6}$	$\frac{\sqrt{31}}{6}$	$\frac{\sqrt{30}}{6}$	$\frac{\sqrt{29}}{6}$	$\frac{\sqrt{26}}{6}$	$\frac{5}{6}$	$\frac{\sqrt{23}}{6}$	$\frac{\sqrt{22}}{6}$	$\frac{\sqrt{21}}{6}$	$\frac{\sqrt{19}}{6}$

$\frac{1}{7}$	$\frac{\sqrt{2}}{7}$	$\frac{\sqrt{3}}{7}$	$\frac{2}{7}$	$\frac{\sqrt{5}}{7}$	$\frac{\sqrt{6}}{7}$	$\frac{\sqrt{7}}{7}$	$\frac{2\sqrt{2}}{7}$	$\frac{3}{7}$	$\frac{\sqrt{10}}{7}$	$\frac{\sqrt{11}}{7}$	$\frac{2\sqrt{3}}{7}$	$\frac{\sqrt{13}}{7}$
$\frac{4\sqrt{3}}{7}$	$\frac{\sqrt{47}}{7}$	$\frac{\sqrt{46}}{7}$	$\frac{3\sqrt{5}}{7}$	$\frac{2\sqrt{11}}{7}$	$\frac{\sqrt{43}}{7}$	$\frac{\sqrt{42}}{7}$	$\frac{\sqrt{41}}{7}$	$\frac{2\sqrt{10}}{7}$	$\frac{\sqrt{39}}{7}$	$\frac{\sqrt{38}}{7}$	$\frac{\sqrt{37}}{7}$	$\frac{6}{7}$

$\frac{\sqrt{14}}{7}$	$\frac{\sqrt{15}}{7}$	$\frac{4}{7}$	$\frac{\sqrt{17}}{7}$	$\frac{3\sqrt{2}}{7}$	$\frac{\sqrt{19}}{7}$	$\frac{2\sqrt{5}}{7}$	$\frac{\sqrt{21}}{7}$	$\frac{\sqrt{22}}{7}$	$\frac{\sqrt{23}}{7}$	$\frac{2\sqrt{6}}{7}$
$\frac{\sqrt{35}}{7}$	$\frac{\sqrt{34}}{7}$	$\frac{\sqrt{33}}{7}$	$\frac{4\sqrt{2}}{7}$	$\frac{\sqrt{31}}{7}$	$\frac{\sqrt{30}}{7}$	$\frac{\sqrt{29}}{7}$	$\frac{2\sqrt{7}}{7}$	$\frac{3\sqrt{3}}{7}$	$\frac{\sqrt{26}}{7}$	$\frac{5}{7}$

$\frac{1}{8}$	$\frac{\sqrt{2}}{8}$	$\frac{\sqrt{3}}{8}$	$\frac{\sqrt{5}}{8}$	$\frac{\sqrt{6}}{8}$	$\frac{\sqrt{7}}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{\sqrt{10}}{8}$	$\frac{\sqrt{11}}{8}$	$\frac{\sqrt{13}}{8}$	$\frac{\sqrt{14}}{8}$	$\frac{\sqrt{15}}{8}$	$\frac{\sqrt{17}}{8}$
$\frac{3\sqrt{7}}{8}$	$\frac{\sqrt{62}}{8}$	$\frac{\sqrt{61}}{8}$	$\frac{\sqrt{59}}{8}$	$\frac{\sqrt{58}}{8}$	$\frac{\sqrt{57}}{8}$	$\frac{\sqrt{55}}{8}$	$\frac{3\sqrt{6}}{8}$	$\frac{\sqrt{53}}{8}$	$\frac{\sqrt{51}}{8}$	$\frac{5\sqrt{2}}{8}$	$\frac{7}{8}$	$\frac{\sqrt{47}}{8}$

$\frac{3\sqrt{2}}{8}$	$\frac{\sqrt{19}}{8}$	$\frac{\sqrt{21}}{8}$	$\frac{\sqrt{22}}{8}$	$\frac{\sqrt{23}}{8}$	$\frac{5}{8}$	$\frac{\sqrt{26}}{8}$	$\frac{3\sqrt{3}}{8}$	$\frac{\sqrt{29}}{8}$	$\frac{\sqrt{30}}{8}$	$\frac{\sqrt{31}}{8}$
$\frac{\sqrt{46}}{8}$	$\frac{3\sqrt{5}}{8}$	$\frac{\sqrt{43}}{8}$	$\frac{\sqrt{42}}{8}$	$\frac{\sqrt{41}}{8}$	$\frac{\sqrt{39}}{8}$	$\frac{\sqrt{38}}{8}$	$\frac{\sqrt{37}}{8}$	$\frac{\sqrt{35}}{8}$	$\frac{\sqrt{34}}{8}$	$\frac{\sqrt{33}}{8}$

（広島県広島女学院中学高等学校）