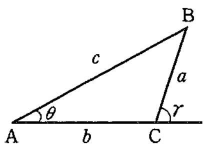
直角三角形以外における

一般の三角比について

坂本(さかもと)　茂(しげる)

三角比はなぜ直角三角形を用いて定義されるのか，と高校1年生に問われた．三角比は相似な直角三角形の辺の比だから，一般の相似な三角形でも同じような定義ができる．三角形の2角が決まれば相似な三角形が定まるから，直角三角形のときは他の1つの角に対し辺の比が決まるが，普通の三角形では辺の比は2角によって決定する．

△ABCにおいて∠Aの内角θ，∠Cの外角γ，$a=$BC，$b=$CA，$c=$ABのとき，角θ，γ $(0^\circ<\theta<\gamma<180^\circ)$で決まる三角比を次のように定義する．



$$\sin(\theta,\ \gamma)=\frac{a}{c},$$

$$\cos(\theta,\ \gamma)=\frac{b}{c},\quad \tan(\theta,\ \gamma)=\frac{a}{b}$$

したがって，$\tan(\theta,\ \gamma)=\dfrac{\sin(\theta,\ \gamma)}{\cos(\theta,\ \gamma)}$

が成り立つ．

［例1］$\sin(30^\circ,\ 60^\circ)=\cos(30^\circ,\ 60^\circ)=\dfrac{1}{\sqrt{3}}$

$\tan(30^\circ,\ 60^\circ)=1$

［問1］次式が成り立つことを示せ．

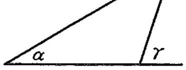
$\sin(\theta,\ 2\theta)=\cos(\theta,\ 2\theta)$，$\tan(\theta,\ 2\theta)=1$

［問2］$\alpha+\beta=\gamma$のとき，次式が成り立つことを示せ．

$\sin(\alpha,\ \gamma)=\cos(\beta,\ \gamma)$

$\cos(\alpha,\ \gamma)=\sin(\beta,\ \gamma)$

$\tan(\alpha,\ \gamma)\tan(\beta,\ \gamma)=1$



特に$\gamma=90^\circ$のときには単に$\sin\theta$，$\cos\theta$，$\tan\theta$で表す．すなわち

$\sin\theta=\sin(\theta,\ 90^\circ)$，$\cos\theta=\cos(\theta,\ 90^\circ)$，

$\tan\theta=\tan(\theta,\ 90^\circ)$

である．

［問3］次の式が成り立つことを証明せよ．

$$\sin(\theta,\ \gamma)=\frac{\sin\theta}{\sin\gamma},\quad \cos(\theta,\ \gamma)=\frac{\sin(\gamma-\theta)}{\sin\gamma},$$

$$\tan(\theta,\ \gamma)=\frac{\sin\theta}{\sin(\gamma-\theta)}$$

［解］△ABCにおいて

$$\sin(\theta,\ \gamma)=\frac{a}{c}=\frac{a\sin\gamma}{c}\cdot\frac{1}{\sin\gamma}=\frac{\sin\theta}{\sin\gamma},$$

$$\cos(\theta,\ \gamma)=\sin(\gamma-\theta,\ \gamma)=\frac{\sin(\gamma-\theta)}{\sin\gamma}$$

［問4］次の値を求めよ．

①$\cos(15^\circ,\ 45^\circ)$ ②$\sin(30^\circ,\ 45^\circ)$ ③$\tan(45^\circ,\ 75^\circ)$

［問5］次の式が成り立つことを証明せよ．

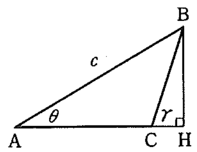
$$\sin^2(\theta,\ \gamma)+\cos^2(\theta,\ \gamma)+2\sin(\theta,\ \gamma)\cos(\theta,\ \gamma)\cos\gamma=1$$

以下，一般の三角比を用いての計算例をいくつか挙げる．

［例2］$\cos(\theta,\ \gamma)=\dfrac{\mathrm{AC}}{\mathrm{AB}}$

$=\dfrac{c\cos\theta-a\cos\gamma}{c}$

$=\cos\theta-\sin(\theta,\ \gamma)\cos\gamma$



だから$\cos\theta=\cos(\theta,\ \gamma)+\sin(\theta,\ \gamma)\cos\gamma$となり，次の加法定理が導かれる．

$$\sin(\gamma-\theta)=\sin\gamma\cos\theta-\sin\theta\cos\gamma$$

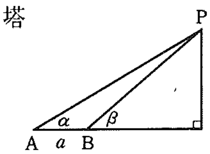
あるいは$\cos\theta=\dfrac{b+a\cos\gamma}{c}$より

$$\cos\theta=\cos(\theta,\ \gamma)+\sin(\theta,\ \gamma)\cos\gamma$$

である．また$\sin\theta=\sin(\theta,\ \gamma)\sin\gamma$である．

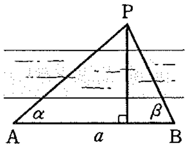
［例3］塔の先端PをA地点で仰角αで見てから，塔に向かってa進んだB地点でPを仰角βで見たとすると，塔の高さは$\overline{\mathrm{PB}}\sin\beta$であるから

$$a\tan(\alpha,\ \beta)\sin\beta=a\frac{\sin\beta\sin\alpha}{\sin(\beta-\alpha)}$$



$$=a\frac{\tan\beta\tan\alpha}{\tan\beta-\tan\alpha}$$

[例4] 川岸に沿ってA，B間の距離がaである2地点A，Bから対岸のP地点を見たときABとのなす角が，それぞれα，βであった．このとき

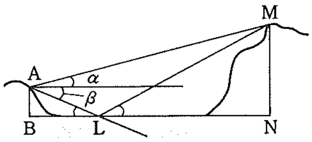


$$\mathrm{AP}=a\tan(\beta,\ 180^\circ-\alpha)=a\frac{\sin\beta}{\sin(\alpha+\beta)}$$

よって，川幅は次のようになる．

$$\mathrm{AP}\sin\alpha=a\frac{\sin\alpha\sin\beta}{\sin(\alpha+\beta)}=a\frac{\tan\alpha\tan\beta}{\tan\alpha+\tan\beta}$$

[例5] 図のように，湖面からの高さが$h=\mathrm{AB}$であるA地点から測った対岸の山の頂Mの仰角がα，湖面に写った頂Mの俯角がβであった．



このときMの湖面からの高さMNは

h：AL＝MN：MLより一般の三角比を使い

$$\mathrm{MN}=h\frac{\mathrm{ML}}{\mathrm{AL}}=h\tan(\beta+\alpha,\ 2\beta)$$
$$=h\frac{\sin(\beta+\alpha)}{\sin(\beta-\alpha)}$$

と表される．なお，$\angle\mathrm{AML}=\beta-\alpha$，また$\alpha$が俯角のときは負の値にして成り立つ．

[例6] △ABCにおいて

$$\sin(A,A+B)=\sin(A,C)$$
$$\cos(A,A+B)=\sin(B,C)$$
$$\tan(A,A+B)=\sin(A,B)$$

が成り立ち，

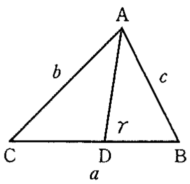
$$a=b\sin(A,B)=c\sin(A,C)$$

であるから次式を得る．

$$\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}$$

[例7] △ABCにおいて

$$a=\mathrm{CD}+\mathrm{BD}$$
$$=b\cos(C,\gamma)$$
$$+c\cos(B,180^\circ-\gamma)$$



であるから

$$a\sin\gamma=b\sin(\gamma+C)+c\sin(\gamma-B)$$

となり，同様に次の式も成り立つ．

$$b\sin\gamma=c\sin(\gamma+A)+a\sin(\gamma-C)$$
$$c\sin\gamma=a\sin(\gamma+B)+b\sin(\gamma-A)$$

この2式にそれぞれb，cを掛けて加え，最初の式にaを掛けたものを引くと

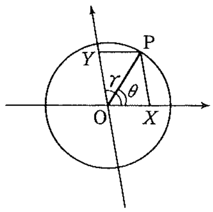
$$(b^2+c^2-a^2)\sin\gamma$$
$$=2bc\sin\gamma\cos A+2ca\cos\gamma\sin B-2ab\cos\gamma\sin C$$
$$=2bc\sin\gamma\cos A+2abc\cos\gamma\left(\frac{\sin B}{b}-\frac{\sin C}{c}\right)$$
$$=2bc\sin\gamma\cos A$$

よって　$(b^2+c^2-a^2)\sin\gamma=2bc\sin\gamma\cos A$

$$a^2=b^2+c^2-2bc\cos A$$

を得る．ここまでに三平方の定理は使われていない．したがって，$A=90^\circ$を考えれば三平方の定理の証明が得られる．

一般角による一般の三角関数は，斜交座標上で定義する．すなわち，X軸，Y軸のなす角がγ ($0^\circ<\gamma<180^\circ$)である斜交座標を考える．



XY平面で原点Oを中心に半径1の円周上にある点Pの斜交座標をP(X,Y)とするとき，X軸の正の向きから正方向に測った動径OPのなす角θの余弦，正弦を次のように定義する．

$$\cos(\theta,\ \gamma)=X,\quad \sin(\theta,\ \gamma)=Y$$

[問6] 次の値を求めよ．

① $\cos(\gamma,\ \gamma)$　② $\sin(0^\circ,\ \gamma)$　③ $\tan(0^\circ,\ \gamma)$

④ $\sin(\gamma,\ \gamma)$　⑤ $\cos(0^\circ,\ \gamma)$　⑥ $\tan(\gamma,\ 0^\circ)$

斜交座標上ではX軸とのなす角αをもつ直線の方程式は$Y=X\tan(\alpha,\ \gamma)+b$と書ける．また半径$a$の円は$X=a\cos(\theta,\ \gamma)$，$Y=a\sin(\theta,\ \gamma)$で表される．

直交座標xyとの関係は

$$x=X+Y\cos\gamma,\quad y=Y\sin\gamma$$

である．したがって，$x=\cos\theta$，$y=\sin\theta$より

$$\sin(\theta,\ \gamma)=Y=\frac{y}{\sin\gamma}=\frac{\sin\theta}{\sin\gamma}$$

$$\cos(\theta,\ \gamma)=X=x-Y\cos\gamma=\frac{\sin(\gamma-\theta)}{\sin\gamma}$$

である．

[問7] 斜交座標上で原点Oと点P(X,Y)との距離OPは$\mathrm{OP}^2=X^2+Y^2+2xy\cos\gamma$で与えられることを示し，次式を証明せよ．

$$\sin^2(\theta,\ \gamma)+\cos^2(\theta,\ \gamma)$$
$$+2\sin(\theta,\ \gamma)\cos(\theta,\ \gamma)\cos\gamma=1$$

[問8] 斜交座標で $X^2+Y^2=1$ と表される曲線は変換により xy 座標では

$$x^2\sin^2\gamma-xy\sin2\gamma+y^2(1+\cos^2\gamma)=\sin^2\gamma$$

となることを示せ.

[問9] 曲線 $X^2+Y^2=1$ は, 直交座標 xy を原点の周りに角 $\frac{\gamma}{2}$ 回転した直交座標 $x'y'$ で

$$\frac{x'^2}{2\cos^2\frac{\gamma}{2}}+\frac{y'^2}{2\sin^2\frac{\gamma}{2}}=1$$

と表されることを示し, この曲線が X, Y 軸の交角の2等分線を主軸とする楕円であることをいえ.

[例8] $X=\cos t$, $Y=\sin t$ $(0^\circ\leqq t<360^\circ)$ は前問の楕円 $X^2+Y^2=1$ を表し, $t=0^\circ$, 90° のときそれぞれ X, Y 軸の正の部分と交わる. 楕円の主軸 $Y=\pm X$ と交わるのは次のときである.

$$\tan t=\frac{Y}{X}=\pm\tan\left(\frac{\gamma}{2},\ \gamma\right)=\pm1$$

また, 楕円上の点Pと原点Oとの距離は $OP^2=1+\sin2t\cos\gamma$ であって, その最大, 最小の値をとるのは $|\sin2t|=1$ のとき, すなわち $|\tan t|=1$ のときである.

[例9] 曲線 $X=a\cos(\theta,\ \gamma)$, $Y=b\sin(\theta,\ \gamma)$ は $a\fallingdotseq b$ のとき楕円で, 直交座標での方程式は

$$\{bx\sin\gamma+y(a-b)\cos\gamma\}^2+a^2(y^2-b^2)\sin^2\gamma=0$$

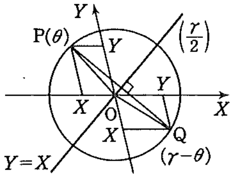
また曲線 $X=a\cos\theta$, $Y=b\sin\theta$ は直交座標で

$$b^2(x\sin\gamma-y\cos\gamma)^2+a^2(y^2-b^2\sin^2\gamma)=0$$

となり楕円であるが, a, b を選んで円にすることはできない.

[例10] $\sin(\gamma-\theta,\ \gamma)=\cos(\theta,\ \gamma)$
$\cos(\gamma-\theta,\ \gamma)=\sin(\theta,\ \gamma)$
$\tan(\gamma-\theta,\ \gamma)=\cot(\theta,\ \gamma)$

$\gamma=90^\circ$ のときは従来の三角比の公式である. 証明は定義の式から得られるが, 図によっても確かめられる. 斜向座標で角 θ に対する動径の単位円周上の点 $P(X,Y)$ とすると, 角 $\gamma-\theta$ に対する同様な点Qは両座標軸で正方向の二等分線 $Y=X$, すなわち傾き



$\frac{\gamma}{2}$ の動径に線対称である. したがって, 斜向座標が $Q(Y,X)$ になるからである.

【注】三角形の内角で一般三角比を定義すると

$\sin(A,A+B)$, $\cos(A,A+B)$, $\tan(A,A+B)$

が, 第2変数を補角にかえればよいから, それぞれ

$\sin(A,C)$, $\cos(A,C)$, $\tan(A,C)$

で定義される. しかし, ここでは基本有向直線 $\overrightarrow{AC}$ に対する2有向直線 $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{CB}$ のなす角として2角 θ, γ をとることを採用したので, 一方は三角形の外角となった.

[問10] 次の式を示せ.

① $\sin(\theta,\ 180^\circ-\gamma)=\sin(180^\circ-\theta,\ \gamma)=\sin(\theta,\ \gamma)$
② $\cos(\theta,\ 180^\circ-\gamma)=-\cos(180^\circ-\theta,\ \gamma)$
$=\cos(-\theta,\ \gamma)$
③ $\tan(\theta,\ 180^\circ-\gamma)=-\tan(180^\circ-\theta,\ \gamma)$
$=-\tan(-\theta,\ \gamma)$
④ $\sin(-\theta,\ \gamma)=\sin(\theta,\ -\gamma)=-\sin(\theta,\ \gamma)$
⑤ $\cos(-\theta,\ \gamma)=\cos(\theta,\ -\gamma)$
⑥ $\tan(-\theta,\ \gamma)=\tan(\theta,\ -\gamma)$

[問11] $\cos(\gamma-90^\circ,\ \gamma)=\sin(90^\circ,\ \gamma)=\dfrac{1}{\sin\gamma}$,

$$|\sin(\theta,\ \gamma)|\leqq\frac{1}{\sin\gamma},\quad |\cos(\theta,\ \gamma)|\leqq\frac{1}{\sin\gamma}$$

が成り立つことを示せ.

[問12] △ABCにおいて, 次式を示せ.

$\sin(A,B)=\cos(-C,B)=-\tan(-A,C)$

また, 内角で定義したときは次式となる.

$\sin(A,B)=\cos(C,B)=\tan(A,C)$

[問13] 次の等式を証明せよ.

① $\sin(\alpha+\beta,\ \gamma)=\sin(\alpha,\ \gamma)\cos\beta+\cos\alpha\sin(\beta,\ \gamma)$
② $\cos(\alpha+\beta,\ \gamma)$
$=\cos(\alpha,\ \gamma)\cos\beta-\cos(\alpha-\gamma)\sin(\beta,\ \gamma)$
③ $\sin(\theta,\ \gamma)\sin(\gamma,\ \theta)=1$
④ $\tan(\theta,\ \gamma)\cos(\gamma,\ \theta)=-1$
⑤ $\cos(\theta+\gamma,\ \gamma)=-\sin(\theta,\ \gamma)$
⑥ $\sin(\theta+\gamma,\ \gamma)=\cos(-\theta,\ \gamma)$
⑦ $\cos(2\theta,\ \theta)=\sin(-\theta,\ \theta)=-1$
⑧ $\sin(2\theta,\ \theta)=\cos(-\theta,\ \theta)$
$=-\tan(2\theta,\ \theta)=2\cos\theta$
⑨ $\sin(2\alpha,\ \gamma)=2\sin(\alpha,\ \gamma)\cos\alpha$
⑩ $\cos(2\alpha,\ \gamma)=\cos2\alpha-2\sin(\alpha,\ \gamma)\cos\alpha\cos\gamma$

(東京都立新宿高等学校)